Geometrie analitică
Suport de sudiu pentru seminar

Mihaela Sterpu

October 22, 2002

Cuprins

1 Spaţii afine **5**

1.1 Exerciţii rezolvate 5

2 Spaţii afine **9**

2.1 Exerciţii rezolvate 9
2.2 Exerciţii propuse 16

3 Subspaţii afine **19**

3.1 Exerciţii rezolvate 19

3.2 Exerciţii propuse 25

4 Subspaţii afine **27**

4.1 Exerciţii rezolvate 27

4.2 Exerciţii propuse 34

5 Tranformări afine **37**

5.1 Exerciţii rezolvate 37

5.2 Exerciţii propuse 44

6 Tranformări afine **47**

6.1 Exerciţii rezolvate 47

6.2 Exerciţii propuse 54

7 Spaţii euclidiene punctuale **57**

7.1 Exerciţii rezolvate 57

7.2 Exerciţii propuse 62

8 Spaţii euclidiene punctuale **65**

8.1 Exerciţii propuse 65

9 Izometrii **67**

9.1 Exerciţii rezolvate 67

9.2 Exerciţii propuse 71

10 Izometrii **73**

10.1 Exerciţii rezolvate 73

10.2 Exerciţii propuse 77

11 Asemănări **79**

11.1 Exerciţii rezolvate 79

11.2 Exerciţii propuse 84

12 Conice **87**

12.1 Exerciţii rezolvate 87

12.2 Exerciţii propuse 91

13 Conice **93**

13.1 Exerciţii rezolvate 93

13.2 Exerciţii propuse 98

14 Cuadrice **101**

14.1 Exerciţii propuse 101

Seminarul 1

Spaţii afine

1.1 Exerciţii rezolvate

E 1.1 *Să se arate că aplicaţia* $\varphi : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \to V_3$, $\varphi(A, B) = \overline{AB}$, *pentru orice* $A, B \in \mathcal{E}_3$, *defineşte o structură afină.*

Soluţie. Axioma (a_1) este verificată. Axioma (a_2) este verificată, conform definiţiei adunării vectorilor liberi.

E 1.2 *Fie* V *un spaţiu vectorial real de dimensiune finită. Să se arate că* $\varphi : V \times V \to V$, $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - \bar{x}$, *pentru orice* $\bar{x}$,$\bar{y} \in V$, *defineşte o structură afină.*

Soluţie. Dacă $\bar{v}, \bar{a} \in V$, atunci $\varphi(\bar{a}, \bar{a} + \bar{v}) = \bar{v}$, deci axioma (a_1) este verificată. Cum $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varphi(\bar{y}, \bar{z}) = (\bar{y} - \bar{x}) + (\bar{z} - \bar{y}) = \bar{z} - \bar{x} = \varphi(\bar{x}, \bar{z})$, pentru orice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$, axioma (a_2) este verificată.

E 1.3 *Să se arate că orice spaţiu afin punctual $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ poate fi dotat cu o structură de spaţiu vectorial.*

Soluţie. Fie $O \in \mathcal{A}$ un punct fixat. Dacă $A, B \in \mathcal{A}$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci există punctele unice $C, D \in \mathcal{A}$ astfel încât $\varphi(O, C) = \varphi(O, A) + \varphi(O, B)$, $\varphi(O, D) = \alpha\varphi(O, A)$. Considerăm, prin definiţie, $A + B = C$, $\alpha A = D$. În raport cu aceste operaţii $\mathcal{A}$ are structură de spaţiu vectorial real.

E 1.4 *Să se determine legătura dintre coordonatele afine şi coordonatele carteziene ale unui punct M relative la reperul afin $\mathcal{S} = \{A_0, \ldots, A_n\}$ şi, respectiv, la reperul cartezian asociat reperului afin $\mathcal{R} = \left(A_0, \{\overline{A_0A_1}, \ldots, \overline{A_0A_n}\}\right)$.*

Soluţie. Fie $(\alpha^0, \ldots, \alpha^n)$ coordonatele afine ale punctului M relative la reperul afin $\mathcal{S}$ şi $(x^1, \ldots, x^n)$ coordonatele carteziene ale punctului M relative la reperul cartezian $\mathcal{R}$. Din $M = \alpha^0 A_0 + \alpha^1 A_1 + \ldots + \alpha^n A_n$, $\alpha^0 + \alpha^1 + \ldots + \alpha^n = 1$, rezultă $\overline{A_0M} = \alpha^1\overline{A_0A_1} + \ldots + \alpha^n\overline{A_0A_n}$. Deducem $\alpha^1 = x^1, \ldots, \alpha^n = x^n$, $\alpha^0 = 1 - x^1 - \ldots - x^n$.

E 1.5 *În planul afin $\mathcal{A}_2$ se consideră punctele afin independente A, B, C, miloacele A', B', C' ale segmentelor BC, CA, AB, respectiv, şi reperele afine $\mathcal{R}_a = \{A, B, C\}$ şi $\mathcal{R}'_a = \{A', B', C'\}$.*

a) Ce înţelegeţi prin faptul punctul M este o combinaţie afină a punctelor A, B, C? Explicaţi semnificaţia expesiei $M = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C$.

b) Să se determine coordonatele afine ale centrului de greutate G al triunghiului ABC în reperul afin $\mathcal{R}'_a$.

c) Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor carteziene ale unui punct când se trece de la reperul cartezian $\mathcal{R}_c$ canonic asociat lui $\mathcal{R}_a$ la reperul cartezian $\mathcal{R}'_c$ asociat lui $\mathcal{R}'_a$.

d) Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor afine ale unui punct când se trece de la reperul afin $\mathcal{R}_a$ la reperul afin $\mathcal{R}'_a$.

Soluţie. b) Din $A' = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, $B' = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$, $C' = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$, deducem $G = \frac{1}{3}A' + \frac{1}{3}B' + \frac{1}{3}C'$.

c) În reperul cartezian $\mathcal{R}_c$, canonic asociat reperului afin $\mathcal{R}_a$, avem $A(0,0), B(1,0), C(0,1), A'(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), B'(0,\frac{1}{2}), C'(\frac{1}{2},0), \overline{A'B'}(-\frac{1}{2},0), \overline{A'C'}(0,-\frac{1}{2})$. Notând (x^1,x^2), (y^1,y^2) coordonatele carteziene ale unui punct relative, respectiv, la reperele carteziene $\mathcal{R}_c$, $\mathcal{R}'_c$, formulele de schimbare a coordonatelor au expresia

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

d) Fie $(\alpha^0,\alpha^1,\alpha^2)$, $(\beta^0,\beta^1,\beta^2)$ coordonatele afine ale lui M respectiv în $\mathcal{R}_a$ şi $\mathcal{R}'_a$. Din $\alpha^1 = x^1$, $\alpha^2 = x^2$, $\beta^1 = y^1$, $\beta^2 = y^2$, folosind rezultatele de la c) obţinem

$$\begin{cases} \alpha^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta^0 \\ \alpha^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta^1 \\ \alpha^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta^2 \end{cases}.$$

E 1.6 *În spaţiul afin $\mathcal{A}^3$ se consideră punctele afin independente O, A, B, C şi se notează cu D, E, F mijloacele segmentelor BC, CA şi, respectiv, AB. Să se determine coordonatele vârfurilor tetraedrului în raport cu reperul cartezian $\left(O, \{\overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}\}\right)$.*

Soluţie. În reperul cartezian considerat avem $O(0,0,0)$, $D(1,0,0)$, $E(0,1,0)$, $F(0,0,1)$. Din $D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, $E = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$, $F = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, deducem $A(-1,0,0)$, $B(1,-1,1)$, $C(1,1,-1)$.

E 1.7 *Fie A, B, C trei puncte coliniare distincte din spaţiul afin punctual $\mathcal{A}$. Dacă $C = \alpha A + \beta B$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha + \beta = 1$, atunci $(AB \mid C) = -\frac{\beta}{\alpha}$.*

Soluţie. Dacă $C = \alpha A + \beta B$ atunci $\overline{CC} = \alpha\overline{CA} + \beta\overline{CB}$. Cum $C \neq A$, rezultă $\alpha \neq 0$, şi $\overline{CA} = -\frac{\beta}{\alpha}\overline{CB}$, adică $(AB \mid C) = -\frac{\beta}{\alpha}$.

E 1.8 *Fie A, B, C trei puncte coliniare distincte din spaţiul afin punctual $\mathcal{A}$. Dacă $(AB \mid C) = k$ atunci $(BA \mid C) = \frac{1}{k}$, $(AC \mid B) = 1 - k$, $(CA \mid B) = \frac{1}{1-k}$, $(CB \mid A) = \frac{k}{k-1}$, $(BC \mid A) = \frac{k-1}{k}$.*

Soluţie. Dacă $(AB \mid C) = k$ atunci $C = \frac{1}{1-k}A - \frac{k}{1-k}B$, $A = kB + (1-k)C$ şi $B = \frac{1}{k}A - \frac{1-k}{k}C$. Aplicând exerciţiul anterior se obţine relaţiile cerute.

Seminarul 2

Spaţii afine

2.1 Exerciţii rezolvate

E 2.1 *În planul afin $\mathcal{A}_2$ se consideră reperele carteziene $\mathcal{R} = (O; \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ şi $\mathcal{R}' = (O'; \{\bar{f}_1, \bar{f}_2\})$. Se notează (x, y), (x', y') coordonatele unui punct în $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, respectiv. Axele $O'x'$, $O'y'$ au, în raport cu reperul $\mathcal{R}$, ecuaţiile $2x + y - 4 = 0$, şi, respectiv, $x - y - 2 = 0$, iar punctul P, care în reperul $\mathcal{R}$ are coordonatele $(1, 1)$, în reperul $\mathcal{R}'$ are cooronatele $(3, 1)$. Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul cartezian $\mathcal{R}$ la reperul cartezian $\mathcal{R}'$.*

Soluţia 1. Deoarece $O'x'$ are ecuaţiile parametrice $x = t$, $y = 4 - 2t$, rezultă că putem considera vectorul $\bar{g}^1(1, -2)$ ca vector director al axei $O'x'$. Analog se găseşte că $\bar{g}_2(1, 1)$ este un vector director pentru axa $O'y'$. Atunci $\bar{f}_1 = \alpha\bar{g}_1$, $\bar{f}_2 = \beta\bar{g}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$.

Originea reperului $\mathcal{R}'$ este punctul $O'(2, 0)$ de intersecţie a dreptelor

$O'x'$, $O'y'$. Formula matriceală de schimbare a coordonatelor este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Punând condiţia ca $x = 1$, $y = 1$, $x' = 3$, $y' = 1$ să verifice (2.1), se obţine $\alpha = -\frac{2}{9}$, $\beta = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Soluţia 2. Formulele de schimbare a coordonatelor sunt de forma

$$\begin{cases} x' = \alpha_1^1 x + \alpha_2^1 y + a^1 \\ y' = \alpha_1^2 x + \alpha_2^2 y + a^2 \end{cases}.$$

Axa $O'x'$ are în reperul $\mathcal{R}'$ ecuaţia $y' = 0$, adică $\alpha_1^2 x + \alpha_2^2 y + a^2 = 0$, axa $O'y'$ are în reperul $\mathcal{R}'$ ecuaţia $x' = 0$, adică $\alpha_1^1 x + \alpha_2^1 y + a^1 = 0$. Rezultă

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - y - 2) \\ y' = \delta(2x + y - 4) \end{cases}. \tag{2.2}$$

Punând condiţia ca $x = 1$, $y = 1$, $x' = 3$, $y' = 1$ să verifice (2.2), se obţine $\gamma = -\frac{2}{3}$, $\delta = -1$.

E 2.2 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_3$ se consideră reperele carteziene $\mathcal{R} = (O; \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ şi $\mathcal{R}' = (O'; \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\})$, astfel încât planele $O'x'y'$, $O'y'z'$, $O'z'x'$ au, în raport cu reperul $\mathcal{R}$, ecuaţiile $x+1=0$, $2x-y=0$ şi, respectiv, $x-2y+3z-6=0$, iar punctul P, care în reperul $\mathcal{R}$ are coordonatele $(1,1,1)$, în reperul $\mathcal{R}'$ are coordonatele $(1,3,1)$. Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul cartezian $\mathcal{R}$ la reperul cartezian $\mathcal{R}'$.*

Soluţia 1. Originea reperului $\mathcal{R}'$ este punctul $O'(-1,-2,1)$ de intersecţie a planelor de coordonate $O'x'y'$, $O'y'z'$, $O'z'x'$.

Axa $O'x'$ are ecuaţiile $x+1=0$, $x-2y+3z-6=0$. Deci $\bar{g}_1(0,-3,2)$ este un vector director pentru $O'x'$. Vectorii directori ai axelor $O'y'$, $O'z'$ sunt $\bar{g}_2(0,0,-1)$, respectiv $\bar{g}_3(1,2,1)$. Deducem $\bar{f}_1=\alpha\bar{g}_1$, $\bar{f}_2=\beta\bar{g}_2$, $\bar{f}_3=\gamma\bar{g}_3$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^*$. Formula matriceală de schimbare a coordonatelor se scrie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ -3\alpha & 0 & 2\gamma \\ 2\alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Punând condiţia ca $x=1$, $y=1$, $z=1$, $x'=1$, $y'=3$, $z'=1$ să verifice (2.3), se obţine $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{8}{9}$, $\gamma=2$. Formula (2.3) se scrie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{9} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Soluţia 2. Formulele de schimbare a coordonatelor sunt de forma

$$\begin{cases} x' = \alpha_1^1 x + \alpha_2^1 y + \alpha_3^1 z + a^1 \\ y' = \alpha_1^2 x + \alpha_2^2 y + \alpha_3^2 z + a^2 \\ z' = \alpha_1^3 x + \alpha_2^3 y + \alpha_3^3 z + a^3 \end{cases}.$$

Planul $O'x'y'$ are în reperul $\mathcal{R}'$ ecuaţia $z'=0$, adică $\alpha_1^3x+\alpha_2^3y+\alpha_3^3z+a^3=0$, planul $O'y'z'$ are în reperul $\mathcal{R}'$ ecuaţia $x'=0$, adică $\alpha_1^1x+\alpha_2^1y+\alpha_3^1z+a^1=0$, iar planul planul $O'x'z'$ are în reperul $\mathcal{R}'$ ecuaţia $y'=0$, adică

$\alpha_1^2 x + \alpha_2^2 y + \alpha_3^2 z + a^2 = 0$ Rezultă

$$\begin{cases} x' = \alpha(2x - y) \\ y' = \beta(x - 2y + 3z - 6) \\ z' = \gamma(x + 1) \end{cases} . \tag{2.4}$$

Punând condiţia ca $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $x' = 1$, $y' = 3$, $z' = 1$ să verifice (2.4), se obţine $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

E 2.3 *În spaţiul geometric elementar $\mathcal{E}_3$, se consideră paralelipipedul*

$$ABCDA'B'C'D'$$

şi reperele carteziene

$$\mathcal{R} = \{A;\ \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA'}\} \text{ şi } \mathcal{R}' = \{C';\ \overline{C'B'}, \overline{C'D'}, \overline{C'C}\}.$$

Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul $\mathcal{R}'$.

Soluţie. În reperul $\mathcal{R}$ avem

$$A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0), A'(0,0,1), C(1,1,0),$$
$$B'(1,0,1), C'(1,1,1), D'(0,1,1),$$
$$\overline{C'B'}(0,-1,0), \overline{C'D'}(-1,0,0), \overline{C'C}(0,0,-1).$$

Formula de schimbare a coordonatelor se scrie

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

E 2.4 *În spaţiul geometric elementar $\mathcal{E}_3$, se consideră paralelipipedul*

$$ABCDA'B'C'D'$$

şi reperele carteziene

$$\mathcal{R} = (C; \{\overline{CB}, \overline{CD}, \overline{CC'}\}) şi\ \mathcal{R}' = (A; \{\overline{AG}_1, \overline{AG}_2, \overline{AG}_3\}),$$

unde G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale feţelor $BCB'C'$, $CDC'D'$ şi, respectiv, $A'B'C'D'$. Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul $\mathcal{R}'$.

E 2.5 *În spaţiul geometric elementar $\mathcal{E}_3$ se consideră reperul cartezian $\mathcal{R} = (O; \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ şi punctele*

$$E_0(1,1,0), E_1(0,3,-1), E_2(1,2,1), E_3(-1,1,-1),$$

date prin coordonatele lor în reperul $\mathcal{R}$.

a) Să se arate sistemul $\mathcal{R}_a = \{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ determină un reper afin şi să se calculeze coordonatele afine relative la $\mathcal{R}_a$ ale punctului $P(0,5,1)$.

b) Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul cartezian canonic asociat reperului afin $\mathcal{R}_a$.

Soluţie. a) Vectorii $\overline{E_0E_1}(-1,2,-1), \overline{E_0E_2}(0,1,1), \overline{E_0E_3}(-2,0,-1)$ sunt liniar independenţi, deci $\mathcal{R}_a$ ete un reper afin. Dacă $(\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ sunt coordonatele afine ale punctului P relativ la reperul afin $\mathcal{R}_a$, atunci

$$\begin{cases} 1 = \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 \\ 0 = -\alpha^1 - 2\alpha^3 + 1 \\ 5 = 2\alpha^1 + \alpha^2 + 1 \\ 1 = -\alpha^1 + \alpha^2 - \alpha^3 \end{cases}.$$

Deducem $\alpha^0 = -2$, $\alpha^1 = 1$, $\alpha^2 = 2$, $\alpha^3 = 0$.

b) Formula de schimbare a coordonatelor se scrie

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

E 2.6 *În spaţiul geometric elementar $\mathcal{E}_3$ se consideră reperul cartezian $Oxyz$ şi punctele $A(2,1,3)$, $B(2,4,0)$, $C(-3,0,4)$ care determină planul π. În planul π se consideră reperul cartezian $\mathcal{R}_\pi = \left(A, \{\overline{AB}, \overline{AC}\}\right)$.*

a) Să se determine coordonatele spaţiale ale punctului P din planul π care are coordonatele $(5,3)$ în reerul $\mathcal{R}_\pi$

b) Să se determine coordonatele în reperul plan ale punctului de intersecţie dintre axa Oz şi planul π.

Soluţie. a) Din $\overline{AB}(0,3,-3)$, $\overline{AC}(-5,-1,1)$ şi $\overline{AP} = 5\overline{AB} + 3\overline{AC}$ deducem $\overline{AP}(-15,12,-12)$. Cum $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AB}$, rezultă $P(-13,13,-9)$.

b) Ecuaţia planului π se scrie:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & -5 \\ y-1 & 3 & -1 \\ z-3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau $y + z - 4 = 0$. Punctul M de intersecţie dintre axa Oz şi planul π are coordonatele carteziene $(0,0,4)$. Din $\overline{OM} = \overline{OA} + t^1\overline{AB} + t^2\overline{AC}$, deducem că punctul M are coordonatele $(t^1, t^2) = (-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$ în reperul cartezian din planul π.

E 2.7 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian $\mathcal{R}$, se dau punctele $A(1,0,0,1)$, $B(0,1,0,1)$, $C(0,0,1,1)$, $D(0,0,0,1)$, $E(1,1,1,0)$.*

a) *Să se arate că sistemul $\mathcal{R}_a = \{A,B,C,D,E\}$ defineşte un reper afin.*

b) *Să se găsească coordonatele afine ale punctului $M(1,2,-2,-1)$ în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a$*

c) *Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul cartezian $\mathcal{R}$ la reperul cartezian canonic asociat reperului afin $\mathcal{R}_a$.*

Soluţie. a) Sistemul de vectori

$$\{\overline{AB}(-1,1,0,0), \overline{AC}(-1,0,1,0), \overline{AD}(-1,0,0,0), \overline{AE}(0,1,1,-1)\}$$

este liniar independent (rang $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4$).

b) Dacă $(\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$ sunt coordonatele afine ale punctului M relativ la reperul afin $\mathcal{R}_a$, atunci $M = \alpha^0 A + \alpha^1 B + \alpha^2 C + \alpha^3 D + \alpha^4 E$, de unde rezultă

$$\begin{cases} 1 = \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \\ 1 = 1 - \alpha^1 - \alpha^2 - \alpha^3 \\ 2 = \alpha^1 + \alpha^4 \\ -2 = \alpha^2 + \alpha^4 \\ -1 = 1 - \alpha^4 \end{cases}.$$

Deducem $\alpha^0 = -1$, $\alpha^1 = 0$, $\alpha^2 = -4$, $\alpha^3 = 4$, $\alpha^4 = 2$.

b) Formula de schimbare a coordonatelor se scrie

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -0 & -0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}.$$

2.2 Exerciţii propuse

E 2.8 *Fie $\mathcal{R} = Oxy$, $\mathcal{R}' = O'x'y'$ două repere carteziene în planul afin $\mathcal{A}_2$. Axele $O'x'$, $O'y'$ au, în raport cu reperul $\mathcal{R}$, ecuaţiile $x+y-4=0$, şi, respectiv, $2x-y+1=0$, iar punctul O are coordonatele $(1,5)$ în reperul $\mathcal{R}'$. Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul cartezian $\mathcal{R}$ la reperul cartezian $\mathcal{R}'$.*

E 2.9 *Fie $\mathcal{R} = Oxyz$, $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$ două repere carteziene în spaţiul afin $\mathcal{A}_3$, astfel încât planele $O'x'y'$, $O'y'z'$, $O'z'x'$ au, în raport cu reperul $\mathcal{R}$, ecuaţiile $x+z=0$, $x-y-2z=0$ şi, respectiv, $2y-z-5=0$, iar punctul P, care în reperul $\mathcal{R}$ are coordonatele $(1,0,1)$, în reperul $\mathcal{R}'$ are cooronatele $(1,2,-4)$. Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul cartezian $\mathcal{R}$ la reperul cartezian $\mathcal{R}'$.*

E 2.10 *În spaţiul geometric elementar $\mathcal{E}_3$, se consideră paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ şi reperele carteziene*

$$\mathcal{R} = (C; \{\overline{CB}, \overline{CD}, \overline{CC'}\}) şi\ \mathcal{R}' = (A; \{\overline{AG}_1, \overline{AG}_2, \overline{AG}_3\}),$$

unde G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale feţelor $BCB'C'$, $CDC'D'$ şi, respectiv, $A'B'C'D'$. Să se scrie formulele de schimbare a coordonatelor când se trece de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul $\mathcal{R}'$.

E 2.11 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian $\mathcal{R}$, se dau punctele*

$$A(1,-1,0,1), B(0,0,2,1), C(2,1,-1,1), D(1,-1,1,1), E(0,-1,0,0).$$

a) *Să se arate că sistemul $\mathcal{R}_a = \{A, B, C, D, E\}$ este un reper afin.*

b) *Să se găsească coordonatele afine ale punctului $M(1,1,1,1)$ în raport cu reperul afin $\mathcal{R}_a$.*

Seminarul 3

Subspaţii afine

3.1 Exerciţii rezolvate

E 3.1 *Să se arate că submulţimea nevidă $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}_n$ este un subspaţiu afin al spaţiului fin real $(\mathcal{A}_n, V_n, \varphi)$ dacă şi numai dacă pentru orice $P, Q \in \mathcal{A}'$ şi pentru orice $\alpha, \beta \in R$, $\alpha + \beta = 1$, avem $\alpha P + \beta Q \in \mathcal{A}'$.*

Soluţie. Dacă $\mathcal{A}'$ este un subspaţiu afin, $O \in \mathcal{A}'$, atunci $\mathcal{A}'$ are subspaţiul vectorial director $W = \{\overline{OM} \mid M \in \mathcal{A}'\}$. Fie $P, Q \in \mathcal{A}'$ şi $\alpha, \beta \in R$, $\alpha + \beta = 1$. Rezultă $\overline{OP}$, $\overline{OQ} \in W$, deci $\alpha\overline{OP} + \beta\overline{OQ} \in W$ (W este subspaţiu vectorial). Din definiţia lui W rezultă că există un punct $R \in \mathcal{A}'$ astfel încât $\overline{OR} = \alpha\overline{OP} + \beta\overline{OQ}$, deci $R = \alpha P + \beta Q \in \mathcal{A}'$.

Reciproc, demonstrăm că mulţimea $W = \{\overline{OM} \mid M \in \mathcal{A}'\} \subseteq V^n$ este un subspaţiu vectorial.

Dacă $\bar{v} \in W$, $\lambda \in \mathbf{R}$, rezultă că există un punct $P \in \mathcal{A}'$ astfel încât $\overline{OP} = \bar{v}$. Aplicând ipoteza deducem că $Q = (1 - \lambda)O + \lambda P \in \mathcal{A}'$, deci

$\overline{OQ} = \lambda\overline{OP} = \lambda\bar{v} \in W$.

Dacă $\bar{u}, \bar{v} \in W$, atunci există $P, Q \in \mathcal{A}'$ astfel încât $\overline{OP} = \bar{u}$, $\overline{OQ} = \bar{v}$. Aplicând ipoteza deducem că $R = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q \in \mathcal{A}'$, deci $\overline{OR} \in W$. Rezultă că $\bar{u} + \bar{v} = 2\left(\frac{1}{2}\overline{OP} + \frac{1}{2}\overline{OQ}\right) = 2\overline{OR} \in W$.

E 3.2 *Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune finită, W un subspaţiu vectorial al lui V şi $\bar{x}_0 \in V$. Submulţimea*

$$L = \{\bar{x}_0 + \bar{y} \,|\, \bar{y} \in W\}$$

a lui V se numeşte varietate liniară determinată de vectorul $\bar{x}_0$ şi subspaţiul vectorial W. Dacă pe V se consideră structura afină φ definită la E 2.2, să se arate că L este un subspaţiu afin.

Soluţie. Deoarece $\bar{x}_0 \in L$ şi $\varphi(\bar{x}_0, \bar{x}_0+\bar{y}) = (\bar{x}_0+\bar{y}) - \bar{x}_0 = \bar{y}$, mulţimea $\{\varphi(\bar{x}_0, \bar{x}_0 + \bar{y}), \bar{y} \in W\} = W$ este un subspaţiu vectorial al lui V.

E 3.3 *Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spaţiu afin real de dimensiune finită n. Să se arate că dacă $\mathcal{S} = \{A_0, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{A}$, atunci*

$$L(\mathcal{S}) = \left\{ M \in \mathcal{A},\ M = \alpha^0 A_0 + \ldots + \alpha^p A_p,\ \alpha^i \in \mathbf{R}, i = \overline{0,p},\ \sum_{i=0}^{p} \alpha^i = 1 \right\}.$$

Soluţie. Notăm

$$\mathcal{A}' = \left\{ M \in \mathcal{A},\ M = \alpha^0 A_0 + \ldots + \alpha^p A_p,\ \alpha^i \in \mathbf{R}, i = \overline{0,p},\ \sum_{i=0}^{p} \alpha^i = 1 \right\}.$$

Evident, $\mathcal{A}'$ este un subspaţiu afin şi $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}'$, deci $L(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}'$.

Fie $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}$ un subspaţiu afin care include $\mathcal{S}$ şi $M = \alpha^0 A_0 + \ldots + \alpha^p A_p \in \mathcal{A}'$, $\sum_{i=0}^{p} \alpha^i = 1$ arbitrar. Din $A_0, \ldots, A_p \in \mathcal{A}''$, rezultă $M \in \mathcal{A}''$. Prin urmare $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}''$. În concluzie $\mathcal{A}' = L(\mathcal{S})$.

E 3.4 *În spaţiul afin real* $(\mathcal{A}, V, \varphi)$, *de dimensiune finită* n, *raportat la reperul cartezian* $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$, *se consideră hiperplanul* π_{n-1} : $\sum_{i=1}^{n} a_1 x^i + a = 0$. *Să se arate că vectorul nenul* $\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} u^i \bar{e}_i$ *este paralel cu* π_{n-1} *dacă şi numai dacă* $\sum_{i=1}^{n} a_i u^i = 0$.

Soluţie. Presupunem că vectorul $\bar{u}$ este paralel cu hiperplanul π_{n-1}, adică $\bar{u} \in V_{n-1}$, unde V_{n-1} este subspaţiul director al lui π_{n-1}. Dacă $a_1 \neq 0$ (nu micşorăm generalitatea presupunând aceasta), ecuaţiile parametrice ale hiperplanului π_{n-1} sunt:

$$\begin{cases} x^1 = -\frac{a_2}{a_1} t^2 - \frac{a_3}{a_1} t^3 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} t^n - \frac{a}{a_1}, \\ x^i = t^i, \quad i = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Atunci $V_{n-1} = L(\{\bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n\})$, unde

$$\begin{aligned} \bar{b}_2 &= (-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \ldots, 0), \\ \bar{b}_3 &= (-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots \\ \bar{b}_n &= (-\frac{a_n}{a_1}, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

Dar $\bar{u} \in V_{n-1}$ implică existenţa scalarilor $\alpha^2, \ldots, \alpha^n \in \mathbf{R}$, astfel încât $\bar{u} = \alpha^2 \bar{b}_2 + \ldots + \alpha^n \bar{b}_n$, adică

$$-\alpha^2 \frac{a_2}{a_1} - \alpha^3 \frac{a_3}{a_1} - \ldots - \alpha^n \frac{a_n}{a_1} = u^1, \quad \alpha^i = u^i, \quad i = \overline{2, n}.$$

De aici, rezultă uşor că $a_1 u^1 + \ldots + a_n u^n = 0$.

Reciproc, presupunem că $a_1 u^1 + \ldots + a_n u^n = 0$. Dacă admitem că $a_1 \neq 0$, obţinem

$$u^1 = -u^2 \frac{a_2}{a_1} - u^3 \frac{a_3}{a_1} - \ldots - u^n \frac{a_n}{a_1}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \sum_{i=1}^{n} u^i \bar{e}_i \\
&= \left(-u^2\frac{a_2}{a_1} - u^3\frac{a_3}{a_1} - \ldots - u^n\frac{a_n}{a_1}\right)\bar{e}_1 + u^2\bar{e}_2 + \ldots + u^n\bar{e}_n \\
&= \left(-\frac{a_2}{a_1}\bar{e}_1 + \bar{e}_2\right)u^2 + \ldots + \left(-\frac{a_n}{a_1}\bar{e}_1 + \bar{e}_n\right)u^n \\
&= u^2\bar{b}_2 + \ldots + u^n\bar{b}_n \in V_{n-1}.
\end{aligned}$$

E 3.5 *În spaţiul afin real* $(\mathcal{A}_4, V_4, \varphi)$ *raportat la reperul cartezian* $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$ *se consideră punctele*

$$A\left(3,1,0,1\right), B\left(-10,4,-6,5\right), P\left(1,0,2,1\right), Q\left(4,-1,2,1\right), R\left(-1,1,-1,4\right).$$

Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului (MN), *unde* M *este varibil pe drepta* AB, *iar* N *un punct variabil în planul* (PQR).

Soluţie. Fie $M(3-13\alpha, 1+3\alpha, -6\alpha, 1+4\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, un punct variabil pe dreapta AB şi $N(1+3\beta-2\gamma, -\beta+\gamma, 2-3\gamma, 1+3\gamma)$, $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$, un punct variabil în planul (PQR). Atunci coordonatele mijlocului H al segmentului (MN) sunt:

$$\begin{cases}
x^1 = \frac{1}{2}(4 - 13\alpha + 3\beta - 2\gamma) \\
x^2 = \frac{1}{2}(1 + 3\alpha - \beta + \gamma) \\
x^3 = \frac{1}{2}(2 - 6\alpha - 3\gamma) \\
x^4 = \frac{1}{2}(2 + 4\alpha + 32\gamma).
\end{cases}$$

Eliminând α, β, γ din relaţiile de mai sus, se obţine ecuaţia locului geometric:

$$6x^1 + 18x^2 - 16x^3 - 18x^4 + 13 = 0,$$

adică un hiperlan.

E 3.6 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{E}_3$ raportat la reperul cartezian $Oxyz$, se consideră punctul $A(1,-1,2)$, planul $\pi : x+y-z-3=0$ şi dreapta* $d: \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y+2z+3=0 \end{cases}$. *Se cere:*

a) Ecuaţia planului care trece prin punctul A şi conţine dreapta d.

b) Ecuaţia planului care conţine dreapta d şi este paralel cu dreapta $d' : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Soluţie. a) Ecuaţiile parametrice ale dreptei d sunt

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \\ z = -t-1 \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

deducem că d trece prin punctul $P(0,1,-1)$ şi are vectorul director $\bar{v}(1,-1,-1)$. Planul π_1 trece prin punctul A şi are vectorii directori $\bar{v}$, $\overline{AP}(-1,2,-3)$. Ecuaţia carteziană a planului π_1 este

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+1 & -1 & -2 \\ z-2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $5x+4y+z-3=0$.

b) Dreata d' are vectorul director $\bar{u}(2,1,-1)$. Planul π_2 trece prin punctul P şi are vectorii directori $\bar{v}$, $\bar{u}$. Ecuaţia cartezianǎ a planului π_2 este

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z+1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $2x - y + 3z + 4 = 0$.

E 3.7 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian, se dau punctele $A(1,-1,0,1)$, $B(0,1,-1,0)$, $C(1,0,-1,0)$, $D(1,2,0,1)$. Să se scrie:*

a) ecuaţiile carteziene ale dreptei AB şi ale dreptei care trece prin C şi este paralelă cu AB;

b) ecuaţiile carteziene ale planului ABC;

c) ecuaţia cartezianǎ a hiperplanului $ABCD$.

Soluţie. a) Dreapta (AB) are ecuaţiile

$$\frac{x^1 - 1}{-1} = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^3}{-1} = \frac{x^4 - 1}{-1}.$$

Ecuaţiile carteziene ale dreptei care trece prin C şi este paralelă cu (AB) sunt

$$\frac{x^1 - 1}{-1} = \frac{x^2}{2} = \frac{x^3 + 1}{-1} = \frac{x^4}{-1}.$$

b) Planul (ABC) are vectorii directori $\overline{AB}(-1,2,-1,-1)$, $\overline{AC}(0,1,-1,-1)$, Ecuaţia vectorială parametrică a planului ABC este $\bar{r} = \overline{OA} + t^1\overline{AB} + t^2\overline{AC}$, $t^1, t^2 \in \mathbf{R}$. Prin eliminarea parametrilor din ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x^1 = 1 - t^1 \\ x^2 = -1 + 2t^1 + t^2 \\ x^3 = -t^1 - t^2 \\ x^3 = 1 - t^1 - t^2 \end{cases}$$

se obţin ecuaţiile carteziene cerute

$$\begin{vmatrix} x^1 - 1 & -1 & 0 \\ x^2 + 1 & 2 & 1 \\ x^3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x^1 - 1 & -1 & 0 \\ x^2 + 1 & 2 & 1 \\ x^4 - 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $x^1 + x^2 + x^3 = 0$, $x^1 + x^2 + x^4 - 1 = 0$.

c) Hiperplanul $ABCD$ este determinat de punctul A şi vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}(0,3,0,0)$. Ecuaţia carteziană a acestui hiperplan este:

$$\begin{vmatrix} x^1 - 1 & -1 & 0 & 0 \\ x^2 + 1 & 2 & 1 & 3 \\ x^3 & -1 & -1 & 0 \\ x^4 - 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $x^3 - x^4 + 1 = 0$.

3.2 Exerciţii propuse

E 3.8 *Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spaţiu afin real de dimensiune finită n. Să se arate că submulţimea nevidă $\mathcal{A}'$ a lui $\mathcal{A}$ este un subspaţiu afin dacă şi*

numai dacă mulţimea razelor vectoare ale punctelor sale, într-un reper cartezian fixat, constituie o varietate liniară.

E 3.9 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian $\mathcal{R}$, se dau punctele $A(1,0,0,1)$, $B(0,1,0,1)$, $C(0,0,1,1)$, $D(0,0,0,1)$, $E(1,1,1,0)$.*

a) Să se scrie ecuaţiile planului (ABC);

b) Să se scrie ecuaţiile planului care trece prin punctul D şi este paralel cu planul (ABC);

c) Să se scrie ecuaţia hiperplanului care trece prin punctul E şi este paralel cu hiperplanul $(ABCD)$.

E 3.10 *În spaţiul afin punctual A_5, într-un reper cartezian, se dau punctele $A(1,1,0,1,2)$, $B(2,-1,3,4,2)$, $C(1,2,7,6,1)$. Să se scrie ecuaţiile carteziene ale dreptei AB şi ale planului ABC.*

E 3.11 *Fie $(\mathcal{A}_3, V_3)$ un spaţiul afin real raportat la reperul cartezian $Ox^1x^2x^3$. Se cere:*

a) Să se scrie ecuaţia generală a planului afin π_1 care trece prin dreapta afină $d_1 : \begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + 1 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 + 3 = 0 \end{cases}$ şi este paralel cu dreapta determinată de punctele $A(-1,2,3)$, $B(1,7,-2)$.

b) Să se scrie ecuaţia carteziană generală a planului afin π_2 care este paralel cu planul afin $\pi_3 : 2x^1 - x^2 + 3x^3 - 4 = 0$ şi conţine dreapta afină $d_2 : \frac{x^1-5}{2} = \frac{x^2}{7} = \frac{x^3}{1}$.

Seminarul 4

Subspaţii afine

4.1 Exerciţii rezolvate

E 4.1 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_3$, în reperul cartezian $Ox^1x^2x^3$ se dau punctul $A(5,-3,2)$, dreptele $d_1 : \begin{cases} x^1+x^2-x^3-1=0 \\ 2x^1-x^2-2=0 \end{cases}$, $d_2 : \frac{x^1-1}{1} = \frac{x^2+1}{-1} = \frac{x^3-2}{2}$ şi $d_3 : \frac{x^1+3}{4} = \frac{x^2-2}{1} = \frac{x^3-1}{5}$. Se cere:*

a) să se scrie ecuaţia planului care trece prin A şi este paralel cu planul Ox^1x^2;

b) să se scrie ecuaţia carteziană a planului care trece d_1 şi este paralel cu d_2;

c) să se scrie ecuaţiile dreptei d care intersectează d_1 şi d_2 şi este paralelă cu d_3.

Soluţie. a) Planul Ox^1x^2 are ecuaţia $x^3 = 0$. Un plan π_1 paralel cu planul Ox^1x^2 are ecuaţia $x^3 + \lambda = 0$. Condiţia $A \in \pi_1$implică $\lambda = -2$.

b) Ecuaţiile parametrice ale dreptei d_1 se scriu

$$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = 2t - 2 \\ x^3 = 3t - 3 \end{cases}, t \in \mathbf{R},$$

deducem că d_1 trece prin punctul $P(0, -2, -3)$ şi are vectorul director $\bar{v}_1(1, 2, 3)$. Dreapta d_2 are vectorul director $\bar{v}_2(1, -1, 2)$. Planul π_2 trece prin punctul P şi are vectorii directori $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$. Ecuaţia carteziană a planului π_2 este

$$\begin{vmatrix} x^1 & 1 & 1 \\ x^2 + 2 & 2 & -1 \\ x^3 + 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $7x^1 + x^2 - 3x^3 - 7 = 0$.

c) Fie $M(t, 2t - 2, 3t - 3)$, $N(s + 1, -s - 1, 2s + 2)$ punctele în care dreapta d intersectează dretele date d_1, resectiv d_2. Din condiţia ca dreapta d să fie paralelă cu dreapta d_3 rezultă că vectorii $\overline{MN}(s + t - 1, -s - 2t + 1, 2s - 3t + 5)$ şi $\bar{v}_3(4, 1, 5)$ sunt liniar dependenţi. Deducem că există un număr real nenul λ astfel încât $s + t - 1 = 4\lambda$, $-s - 2t + 1 = \lambda$, $2s - 3t + 5 = 5\lambda$. Se obţine $t = \frac{4}{3}$, $s = -\frac{4}{3}$, $M(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, iar ecuaţiile dreptei d sunt

$$\frac{x^1 - \frac{4}{3}}{4} = \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{1} = \frac{x^3 - 1}{5}.$$

E 4.2 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian, se dau dreptele*

$$d_1:\begin{cases} x^1 = 1+t \\ x^2 = 2+t \\ x^3 = 3+t \\ x^4 = 4+t \end{cases}, \quad d_2:\begin{cases} x^1 = 0 \\ x^2 + x^3 + 1 = 0 \\ x^4 - 3 = 0 \end{cases}.$$

Să se scrie ecuaţiile sumei geometrice a celor două drepte (acoperirea afină a reuniunii $d_1 \cup d_2$).

Soluţie. Dreapta d_1 trece prin punctul $A(1,2,3,4)$ şi are vectorul director $\bar{v}_1(1,1,1,1)$, iar dreapta d_2 trece prin punctul $B(0,0,-1,3)$ şi are vectorul director al $\bar{v}_2(0,1,-1,0)$. Acoperirea afină a mulţimii $d_1 \cup d_2 \subset \mathcal{A}_4$ este subspaţiul afin care trece prin unctul A şi are aubspaţiul vectorial director generat de vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\overline{AB}(1, 2, 4, 1)$. Cum aceşti vectori sunt

Rangul sistemului de vectori este egal cu liniar independenţi,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3,$$

acoperirea afină $d_1 + d_2$ este hiperplanul de ecuaţie

$$\begin{vmatrix} x^1 - 1 & 1 & 0 & -1 \\ x^2 - 2 & 1 & 1 & -2 \\ x^3 - 3 & 1 & -1 & -4 \\ x^4 - 4 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $x^1 - x^4 + 3 = 0$.

E 4.3 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian, se dau subspaţiile afine* $\alpha_1 : \begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^3 + 2 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + x^4 = 0 \end{cases}$ *şi α_2 definit de punctul $B(1,0,0,1)$ şi vectorii $\bar{b}_1(1, \overline{\quad}1, 0, 2)$, $\bar{b}_2(1,0,2,1)$.*

a) Să se scrie ecuaţiile subspaţiilor afine $\alpha_1 \cap \alpha_2$ şi $\alpha_1 + \alpha_2$.

b) Să se scrie ecuaţia hiperplanului care trece prin α_1 şi este paralel cu dreapta $d : x^1 = x^2$, $x^3 = x^4$, $x^2 = 2x^3$.

c) Să se scrie ecuaţia unui plan β astfel încât $\beta \cap \alpha_1 = \{Q(0,-1,0,1)\}$.

Soluţie. Planul α_1 trece prin punctul $A(0,0,2,0)$ şi admite vectorii directori $\bar{a}_1(1,0,1, \overline{\quad}2)$, $\bar{a}_2(0,1,2, \overline{\quad}1)$, iar planul α_2 are ecuaţiile carteziene $\begin{cases} 2x^1 + 2x^2 - x^3 - 2 = 0 \\ -x^1 + x^2 + x^4 = 0 \end{cases}$. Dacă $\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \varnothing$, Ecuaţiile subspaţiului afin $\alpha_1 \cap \alpha_2$ sunt date de sistemul principal asociat sistemului de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^3 + 2 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + x^4 = 0 \\ 2x^1 + 2x^2 - x^3 - 2 = 0 \\ -x^1 + x^2 + x^4 = 0 \end{cases}.$$

În acest caz sistemul este incompatibil şi $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \varnothing$. Subspaţiul afin $\alpha_1 + \alpha_2$ trece prin punctul A şi are subspaţiul vectorial director generat de vectorii $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \overline{AB}\}$. Cum sistemul $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \overline{AB}\}$ este liniar independent, rezultă $\dim(\alpha_1 + \alpha_2) = 4$ şi $\alpha_1 + \alpha_2 = \mathcal{A}_4$.

b) Dreapta d are vectorul director $\bar{v}(2,2,1,1)$. Se obţine

$$\begin{vmatrix} x^1 & 1 & 0 & 2 \\ x^2 & 0 & 1 & 2 \\ x^3-2 & 1 & 2 & 1 \\ x^4 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $3x^1 - 9x^2 + 7x^3 + 5x^4 - 14 = 0$.

c) Deoarece $Q \in \alpha_1$, orice plan care trece prin Q şi are vectorii directori $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ îndeplineşte condiţia cerută dacă vectorii $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ sunt liniar independenţi. De exemplu putem alege $\bar{c}_1 = \bar{e}_3$, $\bar{c}_2 = \bar{e}_4$. şi pentru β obţinem ecuaţiile:

$$\begin{matrix} x^1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{matrix}.$$

E 4.4 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian, se dau subspaţiile afine*

$$\alpha: \begin{cases} x^1 = 1 + 2t \\ x^2 = 2 + 3t \\ x^3 = 3 + 4t \\ x^4 = 4 + 5t \end{cases}, \quad \beta: \begin{cases} x^1 - x^2 = 0 \\ x^3 - x^4 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Să se scrie ecuaţiile hiperplanelor paralele care conţin subspaţiile α şi, respectiv, β.

Soluţie. Subspaţiul afin α este dreapta care trece prin punctul $A(1,2,3,4)$ şi are vectorul director $\bar{a}(2,3,4,5)$. Subspaţiul afin β este planul care trece prin punctul $B(0,0,1,0)$ şi are vectorii directori $\bar{b}_1(1,1,0,0)$, $\bar{b}_2(0,0,1,1)$.

Vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ fiind liniar independenţi $\left(\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \right)$,

hiperplanele cerute π^1, π^2 vor avea acelaşi subspaţiu director $L(\bar{a}, \bar{b}^1, \bar{b}^2)$ şi vor trece, respectiv, rin unctele A şi B. Obţinem:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x^1 - 1 & 2 & 1 & 0 \\ x^2 - 2 & 3 & 1 & 0 \\ x^3 - 3 & 4 & 0 & 1 \\ x^4 - 4 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \pi_2 : \begin{vmatrix} x^1 & 2 & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 & 0 \\ x^3 - 1 & 4 & 0 & 1 \\ x^4 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

deci $\pi_1 : x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0$, $\pi_2 : x^1 - x^2 - x^3 + x^4 + 1$.

E 4.5 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian, se consideră subspaţiile afine*

$$\alpha : x^1 + x^2 + x^3 - x^4 - 2 = 0, \qquad \beta : \begin{cases} x^1 - x^2 - x^3 - 1 = 0 \\ 2x^1 - x^2 - 2 = 0 \end{cases} ..$$

Să se determine intersecţia şi suma geometrică a subspaţiilor afine α şi β.

Soluţie. Subspaţiul afin α trece prin punctul $A(2, 0, 0, 0)$ şi are vectorii directori $\bar{a}_1(-1, 1, 0, 0)$, $\bar{a}_2(-1, 0, 1, 0)$, $\bar{a}_3(1, 0, 0, 1)$. Planul β trece prin punctul $B(0, 0, -1, -2)$ şi are vectorii directori $\bar{b}_1(1, 0, 1, 2)$, $\bar{b}_2(0, 1, -1, 0)$.

Subspaţiul afin $\alpha \cap \beta$ este determinat de ecuaţiile

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 - x^4 - 2 = 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 - 1 = 0 \\ 2x^1 - x^4 - 2 = 0 \end{cases} .$$

Sistemul fiind incompatibil, deducem $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Sistemul de vectori $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\overline{AB}(-2, 0, -1, -2)$ are rangul 4 ($\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\overline{AB}$ sunt liniar independenţi), deci suma geometrică $\alpha + \beta$ coincide cu spaţiul afin $\mathcal{A}^4$.

E 4.6 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_3$, într-un reper cartezian, se dau dreptele d_1, d_2 prin ecuaţiile lor. Să se decidă dacă aceste drepte sunt sau nu coplanare şi, dacă este cazul, să se scrie ecuaţia planului determinat de ele.*

a) $d_1 : \begin{cases} x^1 + x^3 - 1 = 0 \\ 3x^1 + x^2 - x^3 + 13 = 0 \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} x^1 - 2x^2 + 3 = 0 \\ x^2 + 2x^3 - 8 = 0 \end{cases}$;

b) $d_1 : \begin{cases} 2x^1 + 3x^2 = 0 \\ x^1 + x^3 \quad 8 = 0 \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} x^3 - 4 = 0 \\ 2x^1 + 3x^3 \quad 7 = 0 \end{cases}$;

c) $d_1 : \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 - 1 = 0 \\ x^2 + 4x^3 = 0 \end{cases}$, $d_2 : \begin{cases} 2x^1 + 3x^2 + 6x^3 - 6 = 0 \\ 3x^1 + 4x^2 + 7x^3 = 0 \end{cases}$.

Soluţie. a) $A_1(0, -12, 1) \in d_1$, $A_2(-3, 0, 4) \in d_2$ şi d_1, d_2 au vectorii directori, respectiv, $\bar{a}_1(-1, 4, 1)$, $\bar{a}_2(4, 2, -1)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

d_1 şi d_2 sunt coplanare. Planul determinat de ele are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x^1 + 3 & -1 & 4 \\ x^2 & 4 & 2 \\ x^3 - 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $-2x^1 + 18 + x^2 - 6x^3 = 0$.

4.2 Exerciţii propuse

E 4.7 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_5$, într-un reper cartezian, se consideră subspaţiile afine*

$$\alpha: \begin{cases} x^2 - x^4 - 2 = 0 \\ x^5 - x^4 - 1 = 0 \\ x^1 + x^2 - x^3 + 3 = 0 \end{cases}, \quad \beta: \begin{cases} x^1 - x^2 + 3 = 0 \\ x^2 + x^3 + x^4 - 2x^5 = 0 \end{cases} ..$$

Să se determine intersecţia şi suma geometrică a subspaţiilor afine α şi β.

E 4.8 *În spaţiul afin punctual $\mathcal{A}_4$, într-un reper cartezian, se dau dreapta* $d: \begin{cases} x^1 = x^2 = 3x^3 \\ x^3 = x^4 \end{cases}$, *planul* $\pi: \begin{cases} 3x^1 - 2x^2 + x^4 + 1 = 0 \\ x^2 + x^3 = 0 \end{cases}$ *şi punctul* $P(1, 0, -1, 1)$.

a) Să se scrie ecuaţiile acoperii afine a mulţimii $\pi \cup \{P\}$.

b) Să se scrie ecuaţia hiperplanului care trece prin π şi este paralel cu dreapta d.

c) Să se scrie ecuaţiile planului care trece prin punctul P şi este paralel cu π.

d) Să se scrie ecuaţiile unui plan π_1 astfel încât $\pi \cap \pi_1 = \{B(1, 1, -1, -2)\}$.

E 4.9 *In spaţiul afin punctual $\mathcal{A}^3$, într-un reper cartezian, se dau dreptele*

$$d_1: \begin{cases} x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 - x^2 + x^3 + 4 = 0 \end{cases}, \; d_2: \begin{cases} x^1 + 3x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + x^3 - 2 = 0 \end{cases},$$

punctul $M(2, 3, 1)$ şi vectorul $\bar{v}(-1, 0, 2)$.

a) Să se scrie ecuaţiile dreptei care intersectează dreptele d_1, d_2 şi trece prin punctul M.

b) Să se scrie ecuaţiile dreptei care intersectează dreptele d_1, d_2 şi este paralelă cu vectorul $\bar{v}$.

Seminarul 5

Tranformări afine

5.1 Exerciţii rezolvate

E 5.1 *Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune finită dotat cu structură afină $\varphi : V \times V \to V$, $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - \bar{x}$, $(\forall)$ $\bar{x}$,$\bar{y} \in V$. Să se arate că dacă $\tau : V \to V$ este o aplicaţie liniară atunci τ este o aplicaţie afină.*

Soluţie. Deoarece τ este aplicaţie liniară rezultă că

$$\tau(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha\tau(\bar{x}) + \beta\tau(\bar{y}),$$

pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, în particular pentru $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, cu $\alpha + \beta = 1$, deci τ este o aplicaţie afină.

E 5.2 *În spaţiul afin real $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ de dimensiune n, se consideră reperul cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\})$, hiperplanul $\pi : a^1x^1 + ... + a^nx^n + a^0 = 0$ şi dreapta d astfel încât $d \nparallel \pi$.*

1. *Să se scrie ecuaţiile proiecţiei $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a spaţiului afin $\mathcal{A}$ pe hiperplanul π, în direcţia dreptei d.*

2. *Să se scrie ecuaţiile simetriei $s_\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a spaţiului afin $\mathcal{A}$ faţă de hiperplanul π, în direcţia dreptei d.*

Soluţie. a) Fie $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \bar{e}_i$, vectorul director al dreptei d. Condiţia $d \nparallel \pi$ implică $\sum_{i=1}^{n} v^i a^i \neq 0$. Pentru $M \in \mathcal{A}, \overline{OM} = \sum_{i=1}^{n} x^i \bar{e}_i$, notăm $M' = \tau(M)$, $\overline{OM'} = \sum_{i=1}^{n} y^i \bar{e}_i$. Punctul M' ete determinat de condiţiile (i) $M' \in \pi$ şi (ii) vectorii $\bar{v}$, $\overline{MM'}$ sunt liniar dependenţi, adică există $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, astfel înct $\overline{MM'} = t\bar{v}$. Exprimând în ecuaţii cele două condiţii rezultă

$$\begin{cases} y^j = x^j + tv^j, j = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} y^i a^i + a^0 = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Prin eliminarea parametrului real t din (5.8) se obţin ecuaţiile proiecţiei τ în reperul $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} y^j = x^j - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x^i a^i + a^0}{\sum_{i=1}^{n} v^i a^i} v^j, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5.2}$$

b) Simetria faţă de hiperplanul π în direcţia $\bar{v}$ este aplicaţia s_τ, definită prin $s_\tau(M) = 2\tau(M) - M$, pentru orice $M \in \mathcal{A}$. În consecinţă, ecuaţiile simetriei sunt

$$\begin{cases} y^j = x^j - 2\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x^i a^i + a^0}{\sum_{i=1}^{n} v^i a^i} v^j, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5.3}$$

În cazul particular $n = 3$, ecuaţiile proiecţiei spaţiului afin $\mathcal{A}_3$ pe planul $\pi : a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^0 = 0$ în direcţia $\bar{v} = v^1\bar{e}_1 + v^2\bar{e}_2 + v^3\bar{e}_3$, sunt

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - \dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2 + a^3v^3}v^i, \\ y^2 = x^2 - \dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2 + a^3v^3}v^2, \\ y^3 = x^3 - \dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2 + a^3v^3}v^3, \end{cases} \tag{5.4}$$

iar ecuaţiile simetriei faţă de planul π, în direcţia $\bar{v}$, sunt

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - 2\dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2 + a^3v^3}v^i, \\ y^2 = x^2 - 2\dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2 + a^3v^3}v^2, \\ y^3 = x^3 - 2\dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2 + a^3v^3}v^3. \end{cases} \tag{5.5}$$

Dacă $n = 2$, ecuaţiile proiecţiei spaţiului afin $\mathcal{A}_2$ pe dreapta $\pi : a^1x^1 + a^2x^2 + a^0 = 0$ în direcţia $\bar{v} = v^1\bar{e}_1 + v^2\bar{e}_2$, sunt

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - \dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2}v^i, \\ y^2 = x^2 - \dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2}v^2, \end{cases} \tag{5.6}$$

iar ecuaţiile simetriei faţă de dreapta π, în direcţia $\bar{v}$, sunt

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - 2\dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2}v^i, \\ y^2 = x^2 - 2\dfrac{a^1x^1 + a^2x^2 + a^0}{a^1v^1 + a^2v^2}v^2. \end{cases} \tag{5.7}$$

E 5.3 *În spaţiul afin real $(\mathcal{A}_3, V_3, \varphi)$ se consideră reperul cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$, planul $\pi : a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^0 = 0$ şi dreapta d care trece prin punctul $P(\bar{r}_0)$ şi are vectorul director $\bar{v}$, astfel încât $d \nparallel \pi$.*

a) Să se scrie ecuaţiile proiecţiei $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a spaţiului afin $\mathcal{A}$ pe dreapta d, paralelă cu planul π .

b) Să se scrie ecuaţiile simetriei s_τ : $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a spaţiului afin $\mathcal{A}$ faţă de dreapta d, paralelă cu planul π.

Soluţie. a) Fie $\bar{v} = v^1\bar{e}_1 + v^2\bar{e}_2 + v^3\bar{e}_3$, vectorul director al dreptei d. Condiţia $d \nparallel \pi$ implică $v^1a^1 + v^2a^2 + v^3a^3 \neq 0$. Pentru $M \in \mathcal{A}$, $\overline{OM} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3$, notăm $M' = \tau(M)$, $\overline{OM'} = y^1\bar{e}_1 + y^2\bar{e}_2 + y^3\bar{e}_3$. Punctul M' este determinat de condiţiile (i) $M' \in d$ şi (ii) dreapta MM' este paralelă cu planul π. Exprimând în ecuaţii cele două condiţii rezultă

$$\begin{cases} y^j = x_0^j + tv^j, j = \overline{1,3}, \\ (y^1 \quad x^1)\, a^1 + (y^2 \quad x^2)\, a^2 + (y^3 \quad x^3)\, a^3 = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Prin eliminarea parametrului real t din (5.8) se obţin ecuaţiile proiecţiei τ în reperul $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} y^j = x_0^j + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{3} (x^i - x_0^i)\, a^i}{v^1a^1 + v^2a^2 + v^3a^3} v^j, j = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{5.9}$$

b) Conform E **??**, simetria faţă de dreapta d, paralelă cu planul π. este aplicaţia s_τ, definită prin $s_\tau(M) = 2\tau\,(M) - M$, pentru orice $M \in \mathcal{A}$. În consecinţă, ecuaţiile simetriei sunt

$$\begin{cases} y^j = 2x_0^j - x^j + 2\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{3} (x^i - x_0^i)\, a^i}{v^1a^1 + v^2a^2 + v^3a^3} v^j, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5.10}$$

E 5.4 *În spaţiul afin real* $(\mathcal{A}_3, V_3, \varphi)$ *se consideră un reper cartezian* $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ *şi punctul* $O'(2, -1, 3)$.

a) Să se scrie ecuaţiile simetriei S *spaţiului afin* $\mathcal{A}_3$ *faţă de punctul* O'.

b) Să se scrie ecuaţiile omotetiei $O_{\alpha,O'}$ *de centru* O' *şi coeficient* $\alpha = 3$

c) Să se determine imaginea punctului $P(1, 0, 3)$ *prin transformările afine definite la a) şi, respectiv, b).*

d) Să se determine imaginea dreptei $d : \frac{x^1-2}{2} = \frac{x^2}{3} = \frac{x^3+1}{-1}$ *prin transformările afine definite la a) şi, respectiv, b).*

e) Să se determine imaginea planului $\pi : x^1 + 2x^2 - x^3 - 1 = 0$ *prin transformările afine definite la a) şi, respectiv, b).*

Soluţie. a) Ecuaţiile simetriei S sunt

$$\begin{cases} y^1 - 2 = -(x^1 - 2) \\ y^2 + 1 = -(x^2 + 1) \\ y^3 - 3 = -(x^3 - 3) \end{cases}.$$

a) Ecuaţiile omotetiei $O_{\alpha,O'}$ sunt

$$\begin{cases} y^1 - 2 = 3(x^1 - 2) \\ y^2 + 1 = 3(x^2 + 1) \\ y^3 - 3 = 3(x^3 - 3) \end{cases}.$$

c) Dreapta $S(d)$ are ecuaţiile

$$d : \frac{2 - (x^1 - 2) - 2}{2} = \frac{-1 - (x^2 + 1)}{3} = \frac{3 - (x^3 - 3) + 1}{-1},$$

iar ecuaţiile dreaptei $O_{\alpha,O'}(d)$ sunt

$$d: \frac{2+\frac{1}{3}(x^1-2)-2}{2} = \frac{-1+\frac{1}{3}(x^2+1)}{3} = \frac{3+\frac{1}{3}(x^3-3)+1}{-1}.$$

d) Planul $S(\pi)$ are ecuaţia

$$2-(x^1-2)+2\left(-1-(x^2+1)\right)-\left(3-(x^3-3)\right)-1=0$$

adică $x^1+2x^2-x^3+7=0$, iar planul $O_{\alpha,O'}(\pi)$ are ecuaţia

$$2+\frac{1}{3}(x^1-2)+2\left(-1+\frac{1}{3}(x^2+1)\right)-\left(3+\frac{1}{3}(x^3-3)\right)-1=0,$$

adică $x^1+2x^2-x^3-9=0$.

E 5.5 *Să se arate că aplicaţia $\varphi: \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$, dată într-un reper cartezian prin ecuaţiile*

$$\begin{cases} y^1 = -x^1+x^2-3x^3-6 \\ y^2 = x^1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+3 \\ y^3 = x^1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+3 \end{cases}$$

este o proiecţie a lui $\mathcal{A}_3$. Să se determine subspaţiul afin de proiecţie şi direcţia de proiecţie.

Soluţie. Prin calcul direct se arată că $\varphi\circ\varphi=\varphi$, deci φ este o proiecţie. Conform E **??**, subspaţiul afin de proiecţie este mulţimea punctelor fixe ale lui φ. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^1 = -x^1+x^2-3x^3-6 \\ x^2 = x^1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3+3 \\ x^3 = x^1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+3 \end{cases},$$

se obţine că subspaţiul de proiecţie este planul

$$\pi : -2x^1 + x^2 - 3x^3 - 6 = 0.$$

Direcţia de proiecţie este $\ker T$, unde T este operatorul liniar asociat lui φ, operator definit de ecuaţiile

$$\begin{cases} y^1 = -x^1 + x^2 - 3x^3 \\ y^2 = x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 \\ y^3 = x^1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 0 = -x^1 + x^2 - 3x^3 \\ 0 = x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 \\ 0 = x^1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 \end{cases},$$

se obţine că $\ker T = L\left(\{\bar{v}\}\right)$, unde $\bar{v}\,(-2, 1, 1)$.

E 5.6 *Să se arate că dacă o transformare afină φ a spaţiului afin real $\mathcal{A}$ are două puncte fixe, distincte, atunci ea are o infinitate de puncte fixe.*

Soluţie. Fie A şi $B \in \mathcal{A}, A \neq B$, două puncte fixe pentru φ. Fie C un punct arbitrar pe dreapta AB şi fie $(AB \mid C) = k$, raportul simplu al punctelor coliniare A, B, C. Deoarece raportul simplu este un invariant afin, rezultă

$$(\varphi(A)\varphi(B) \mid \varphi(C)) = (AB \mid \varphi(C)) = k.$$

Din unicitatea punctului care împarte un segment într-un raport dat deducem $\varphi(C) = C$. În concluzie, $\tau_1(C) = \tau_2(C)$, pentru orice $C \in AB$.

E 5.7 *Să se arate că, dacă o transformare afină $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ are un unic punct fix C, atunci orice dreaptă invariantă în raport cu φ trece prin C.*

Soluţie. Preupunem prin absurd că $C \notin d$. Atunci putem alege un reper cartezian cu originea C şi axa Cx paralelă cu dreapta d. Punctul $C(0,0)$ fiind fix pentru transformarea φ, ecuaţiile lui φ sunt

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

În plus, punctul fix este unic. Atunci

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.11}$$

Fie $y \models a$, $a \neq 0$, ecuaţia dreptei d în reperul ales. Ţinând seama că dreapta d este invariantă în raport cu φ avem $\varphi(M) = M'(x', a) \in d$, oricare ar fi $M(x, a) \in d$. Deci

$$a = a_{21}x + a_{22}a,$$

oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Obţinem $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, ceea ce contrazice (**??**).

5.2 Exerciţii propuse

E 5.8 *In spaţiul afin real $(\mathcal{A}_3, V_3, \varphi)$, în reperul cartezian*

$$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$$

se consideră vectorul $\bar{v}(-2, 1, 1)$ şi planul $\pi : 2x^1 - x^2 + 3x^3 + 6 = 0$.

a) Să se scrie ecuaţiile proiecţiei $\tau : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ a spaţiului afin $\mathcal{A}_3$ pe planul π, paralel cu $\bar{v}$.

b) Să se scrie ecuaţiile simetriei $s_\tau : \overset{3}{\mathcal{A}} \to \overset{3}{\mathcal{A}}$ a spaţiului afin $\overset{3}{\mathcal{A}}$ faţă de planul π paralel d.

E 5.9 *Să se arate că aplicaţia $\varphi : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$, dată într-un reper cartezian prin ecuaţiile*

$$\begin{cases} y^1 = \frac{1}{3}x^1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3} \\ y^2 = -\frac{4}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3} \\ y^3 = -x^3 \end{cases}$$

este simetria lui $\mathcal{A}_3$ faţă de un subspaţiu al său. Să se determine acest subspaţiu afin şi direcţia de simetrie.

E 5.10 *Să se arate că, dacă o transformare afină $\varphi : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ are un unic punct fix C, atunci orice dreaptă invariantă în raport cu φ trece prin C şi orice plan invariant în raport cu φ trece prin punctul C.*

E 5.11 *Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spaţiu afin real, de dimensiune finită n, $C \in \mathcal{A}$, $\bar{\mathbf{v}} \in V$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. Se notează cu $O_{\alpha,C}$ omotetia de centru C şi coeficient α, iar cu $t_{\bar{v}}$ translaţia de vector $\bar{v}$. Să se precizeze semnificaţia geometrică a aplicaţiei $O_{\alpha,C} \circ t_{\bar{v}} \circ (O_{\alpha,C})^{-1}$.*

E 5.12 *Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spaţiu afin real, de dimensiune finită n, $C \in \mathcal{A}$, $\bar{\mathbf{v}} \in V$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 1$. Se notează cu $O_{\alpha,C}$ omotetia de centru C şi coeficient α, iar cu $t_{\bar{v}}$ translaţia de vector $\bar{v}$. Să se arate că $O_{\alpha,C} \circ t_{\bar{v}}$ este*

o omotetie de centru C_1 şi coeficient α, unde punctul C_1 este determinat de relaţia

$$\overline{CC_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\bar{v}.$$

E 5.13 *Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spaţiu afin real, de dimensiune finită n, şi φ_1, φ_2 două omotetii de centre C_1, C_2 respectiv. Dacă $\varphi_1 \circ \varphi_2$ este o omotetie de centru C_3 atunci punctele C_1, C_2, C_3 sunt coliniare.*

Seminarul 6

Tranformări afine

6.1 Exerciţii rezolvate

E 6.1 *Să se determine semnificaţia geometrică a transformării afine τ a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$ care transformă vârfurile tetraedrului $ABCD$ în centrele de greutate ale feţelor opuse, respectiv.*

Soluţie. Alegem reperul cartezian $\mathcal{R} = \{A; \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\}$. Coordonatele punctelor date în acest reper sunt $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$. Notăm cu A', B', C', D' respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor $[BCD]$, $[CDA]$, $[DAB]$, $[ABC]$. Coordonatele acestor puncte în reperul $\mathcal{R}$ sunt $A'(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $B'(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $C'(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$, $D'(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. Ţinând seama de ipoteza $\tau(A) = A'$, $\tau(B) = B'$, $\tau(C) = C'$, $\tau(D) = D'$, obţinem

ecuaţiile transformării τ

$$\begin{cases} y^1 = -\frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3} \\ y^2 = \ \ \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3} \\ y^3 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Punctul fix este $G(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, adică centrul de greutate al sistemului $\{A, B, C, D\}$. Transformarea afină τ este omotetia de centru G şi coeficient $k = -\frac{1}{3}$.

E 6.2 *Să se determine punctele fixe, dreptele invariante şi planele invariante ale transformărilor afine $\varphi : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ ale spaţiului afin $\mathcal{A}_3$ date, într-un reper cartezian $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = 2y + z + 2 \\ z' = 2z + 3 \end{cases}.$$

Soluţie. a) Punctele fixe se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = 2x + y + 1 \\ y = 2y + z + 2 \\ z = 2z + 3 \end{cases}.$$

Rezultă că φ admite unicul punct fix $C(-2, 1, -3)$.

Matricea operatorului liniar asociat transformării φ, în raport cu baza $\{\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3\}$, este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Atunci φ are o unică direcţie invariantă dată de vectorul $\bar{a} = \bar{e}_1$. Tranformarea φ are unică dreaptă invariantă d, care trece prin punctul fix C şi are vectorul director $\bar{a}$. Ecuaţiile dreptei invariante sunt:

$$d : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Fie $\pi : a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ un plan invariant în raport cu φ. Planul $\varphi(\pi)$ are ecuaţia

$$a_1(2x + y + 1) + a_2(2y + z + 2) + a_3(2z + 3) + a_4 = 0,$$

sau

$$\varphi(\pi) : 2a_1x + (a_1 + 2a_2)y + (a_2 + 2a_3)z + a_1 + 2a_2 + 3a_3 + a_4 = 0.$$

Condiţia $\varphi(\pi) = \pi$ implică

$$\frac{2a_1}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_2}{a_2} = \frac{a_2 + 2a_3}{a_3} = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + a_4}{a_4},$$

de unde se obţine $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = \alpha$, $\alpha \neq 0$, $a_4 = 3\alpha$, iar planul invariant în raport cu φ are ecuaţia

$$\pi : z + 3 = 0.$$

E 6.3 *În planul afin $(\mathcal{A}_2, V_2)$, se consideră reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Să se determine ecuaţiile transformării afine $\varphi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, care duce punctul $A(1, 2)$ în punctul $A'(3, 5)$, vectorul $\bar{u}(2, 1)$ în $\bar{u}'(1, -2)$ şi $\bar{v}(1, -1)$ în $\bar{v}'(2, 5)$.*

Soluţie. Fie $T : V_2 \to V_2$ operatorul liniar asociat transformării afine φ. Din $T(\bar{u}) = \bar{u}'$; $T(\bar{v}) = \bar{v}'$, rezultă

$$\begin{cases} T(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = \bar{e}_1 \quad 2\bar{e}_2 \\ T(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 \mp 5\bar{e}_2 \end{cases},$$

deci $T(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $T(\bar{e}_2) = -\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$. Ecuaţiile lui φ în reperul considerat sunt

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + 2x^2 + a^1 \\ y^2 = -2x^1 + 5x^2 + a^2 \end{cases}.$$

Condiţia $\varphi(A) = A'$ implică $a^1 - 2$, $a^2 = -3$.

E 6.4 *În planul afin $\mathcal{A}_2$, se consideră reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Să se determine ecuaţiile transformării afine $\varphi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, care duce punctele $A(1,0)$, $B(2,-1)$, $C(1,2)$ în punctele $A'(2,1)$, $B'(3,2)$, $C'(1,4)$ respectiv.*

Soluţie. Ecuaţiile lui φ sunt de forma

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}.$$

Din condiţiile $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$ se obţine $a_{11} = \frac{1}{2}$, $a_{12} = -\frac{1}{2}$, $a_{21} = \frac{5}{2}$, $a_{22} = \frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 - \frac{3}{2}$.

E 6.5 *În planul afin $(\mathcal{A}_2, V_2)$ se consideră punctele afin independente A, B, C şi transformarea afină $\tau : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ cu proprietatea că $\tau(A) = B$, $\tau(B) = A$, $\tau(C) = C$. Să se determine punctele fixe, direcţiile invariante şi să se interpreteze geometric transformarea τ.*

Soluţie. Alegem reperul cartezian $\mathcal{R} = \{C; \overline{CA}, \overline{CB}\}$. În acest reper, coordonatele punctelor date sunt $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(0,0)$. Ţinând seama de ipoteză obţinem ecuaţiile transformării

$$\begin{cases} y^1 = x^2 \\ y^2 = x^1 \end{cases}.$$

Punctele fixe sunt $P(\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, adică punctele dreptei CD, unde D este mijlocul segmentului $[AB]$.

Matricea transformării τ este

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci valorile proprii ale operatorului liniar asociat lui τ sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, iar vectorii proprii corespunzători sunt $\bar{a}_1(1,1)$, $\bar{a}_2(1,-1)$.

Transformarea admite două direcţii invariante: direcţia dreptei CD şi direcţia dreptei AB. Astfel, transformarea τ este simetria planului $\mathcal{A}_2$ faţă de dreapta $x^1 = x^2$, adică faţă de dreapta CD, în direcţia dreptei AB.

E 6.6 *Se consideră transformarea afină $\varphi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, care în raport cu reperul cartezian $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2\})$ are ecuaţiile*

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}.$$

Se cere:

a) să se determine punctele fixe şi dreptele invariante în raport cu φ;

b) să se scrie ecuaţiile transformării φ în reperul cartezian raportat la dreptele invariante.

Soluţie. a) Punctele fixe se obţin rezolvând sistemul
$$\begin{cases} x = x + 2y \\ y = 4x + 3y \end{cases}.$$

Rezultă că tranformarea φ admite unicul punct fix $O(0,0)$.

Matricea operatorului liniar asociat transformării φ, în raport cu baza $\{e_1, e_2\}$, este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda^1 = -1$, $\lambda^2 = 5$. Atunci direcţiile invariante în raport cu φ sunt date de vectorii $\bar{a}_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ şi $\bar{a}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$. Tranformarea φ are două drepte invariante d_1 şi d_2, care trec prin punctul fix O şi au vectorii directori $\bar{a}_1$ şi, respectiv, $\bar{a}_2$. Ecuaţiile dreptelor invariante sunt:

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y}{1}, \quad d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1}.$$

b) În reperul cartezian $\mathcal{R}' = (O; \bar{a}_1, \bar{a}_2)$, punctul O este punct fix pentru φ matricea operatorului liniar asociat lui φ are forma diagonală canonică $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, deci ecuaţiile transformării φ sunt:
$$\begin{cases} X' = -X \\ Y' = 5Y \end{cases}.$$

E 6.7 *În planul planul $\mathcal{A}_2$, raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, se consideră dreptele $d_1 : x + y - 1 = 0$, $d_2 : x - 3y + 1 = 0$. Să se scrie ecuaţiile transformării afine $\varphi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, în raport cu $\mathcal{R}$, ştiind că dreptele d^1, d^2 sunt invariante în raport cu φ, iar $\varphi(O) = O'(1, -1)$.*

Soluţia 1. Ecuaţiile lui φ sunt de forma

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}.$$

Deoarece $\varphi(O) = O'$, obţinem $a_1 = 1, a_2 = -1$. Ţinând seama că dreptele d_1, d_2 sunt invariante în raport cu φ, oricare ar fi $M(\alpha, 1 - \alpha) \in d_1$ şi $N(3\beta - 1, \beta) \in d_2$ avem:

$$\varphi(M) = M'(a_{11}\alpha + a_{12}(1 - \alpha) + 1, a_{21}\alpha + a_{22}(1 - \alpha) - 1) \in d_1$$

şi

$$\varphi(N) = N'(a_{11}(3\beta - 1) + a_{12}\beta + 1, a_{21}(3\beta - 1) + a_{22}\beta - 1) \in d_2.$$

Rezultă

$$(a_{11} - a_{12} + a_{21} - a_{22})\alpha + a_{12} + a_{22} - 1 = 0,$$

oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$ şi

$$(3a_{11} + a_{12} - 9a_{21} - 3a_{22})\beta - a_{11} + 3a_{21} + 5 = 0,$$

oricare ar fi $\beta \in \mathbf{R}$. Deducem

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} + a_{21} - a_{22} = 0 \\ a_{12} + a_{22} = 1 \\ 3a_{11} + a_{12} - 9a_{21} - 3a_{22} = 0 \\ -a_{11} + 3a_{21} = -5 \end{cases}$$

de unde găsim $a_{11} = 2$, $a_{12} = -3$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 4$. Astfel, ecuaţiile transformării φ sunt:

$$\begin{cases} x' = 2x \quad 3y + 1 \\ y' = -x \mp 4y - 1 \end{cases} .$$

6.2 Exerciţii propuse

E 6.8 *Să se determine punctele fixe, dreptele invariante şi planele invariante ale transformărilor afine $\varphi : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ ale spaţiului afin $\mathcal{A}_3$ date, într-un reper cartezian $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, prin ecuaţiile:*

$$a) \begin{cases} x' = 3x - 4y + 6 \\ y' = 4x + 3y \quad 8 \\ z' = -2z + 9 \end{cases} ; \; b) \begin{cases} x' = x + z + 1 \\ y' = y + 2z + 2 \\ z' = y - 1 \end{cases} .$$

E 6.9 *În planul afin $\mathcal{A}_2$, se consideră reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Să se determine ecuaţiile transformării afine $\varphi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, care duce punctul $A(1, -1)$ în punctul $A'(2, 1)$, vectorul $\bar{u}(-1, 2)$ în $\bar{u}'(-2, 6)$ şi $\bar{v}(2, 1)$ în $\bar{v}'(4, -2)$. Să se determine punctele fixe şi direcţiile invariante ale transformării φ.*

E 6.10 *În spaţiul afin $\mathcal{A}_2$ se consideră trei puncte afin independente A, B, C.*

a) să se determine punctele fixe şi dreptele invariante ale transformării afine $\tau : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, care duce punctele A, B, C în punctele B, C, A respectiv.

b) să se determine semnificaţia geometrică a transformării afine φ care transformă vârfurile triunghiului ABC în mijloacele laturilor opuse, respectiv.

E 6.11 *Se consideră transformarea afină $\varphi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, care în raport cu reperul cartezian $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2\})(= Oxy)$ are ecuaţiile*

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 4y \end{cases}.$$

Se cere:

a) să se determine punctele fixe şi dreptele invariante în raport cu φ;

b) să se arate că există o dreaptă d în plan astfel încât oricare ar fi $M \in E_2$, $MM' \| d$, unde $M' = \varphi(M)$.

E 6.12 *Să se determine punctele fixe şi dreptele invariante ale transformării afine $\varphi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$, dată într-un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \{e_1, e_2\})$ prin ecuaţiile*

$$a) \begin{cases} x' = 7x - y + 1 \\ y' = 4x + 2y + 4 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x' = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5} \end{cases}$$

Seminarul 7

Spaţii euclidiene punctuale

7.1 Exerciţii rezolvate

E 7.1 *În spaţiul punctual euclidian $\mathcal{E}_3$, în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = Ox^1x^2x^3$, se consideră punctele $A\,(1,0,1)$, $B\,(2,1,-1)$, $C\,(1,\alpha,3)$.*

a) Să se determine α astfel încât punctele A, B, C şi O să fie coplanare.

b) Pentru $\alpha = 2$, să se calculeze aria triunghiului ABC şi volumul tetraedrului $OABC$.

Soluţie. a) Condiţia de coplanaritatea a punctelor A, B, C, O este ca vectorii $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ să fie liniar dependenţi, deci ca

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că $\alpha = \frac{2}{3}$.

b) Aria$(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB} \times \overline{AC}\right\|$. Avem $\overline{AB}\,(1,1,-2)$, $\overline{AC}\,(0,2,2)$ şi

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3,$$

de unde rezultă Aria$(ABC) = 22$. Volumul tetraedrului $ABCD$ este

$$Vol\,(ABCD) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}.$$

E 7.2 *În spaţiul punctual euclidian $\mathcal{E}_3$, în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, se consideră dreapta*

$$d: \begin{cases} 2x^1 + x^2 - x^3 - 1 = 0 \\ x^1 - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

şi punctul $A\,(2,1,-1)$. Se cere:

a) Să se calculeze distanţa de la punctul A la dreapta d.

b) Să se determine coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului A pe dreapta d.

c) Să se scrie ecuaţiile perpendicularei dusă din A pe dreapta d.

Soluţie. Ecuaţiile parametrice ale dreptei d se scriu

$$d: \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t + 1 \\ x^3 = 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Dreapta d trece prin punctul $P(0,1,0)$ şi are vectorul director $\bar{v}(1,1,3)$.

a) Avem

$$\bar{v} \times \overline{AP} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{e}_1 - 72\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3,$$

deci

$$\rho(A,d) = \frac{\left\|\bar{v} \times \overline{AP}\right\|}{\|\bar{v}\|} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{11}}.$$

b) Fie M proiecţia ortogonală a punctului A pe dreapta d. Atunci $M(t, t+1, 3t)$ şi $AM \perp d$, de unde rezultă că $< \overline{AM}, \bar{v} >= 0$, adică $t - 2 + t + 3(3t+1) = 0$. Se obţine $t = -\frac{1}{11}$ şi $M\ \left(-\frac{1}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{3}{11}\right)$.

c) Dreapta cerută este

$$AM : \frac{x^1 - 2}{-23} = \frac{x^2 - 1}{-1} = \frac{x^3 + 1}{8}.$$

E 7.3 *În spaţiul punctual euclidian $\mathcal{E}_3$, în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, se consideră planul $\pi : 2x^1 + x^2 - x^3 - 1 = 0$ şi punctul $A(2,-1,1)$.şi punctul . Se cere:*

a) Să se scrie ecuaţiile perpendicularei dusă din A pe planul π.

b) Să se determine coordonatele proiecţiei ortogonale A' a punctului A pe planul π şi coordonatele punctului A'', simetricul lui A faţă de planul π.

c) Să se calculeze distanţa de la punctul A la planul π.

Soluţie. a) Vectorul $\bar{n}(2,1,-1)$ este un vector normal pentru planul π. Dreapta cerută d trece prin punctul A şi are vectorul director $\bar{n}$, deci are ecuaţiile

$$d: \frac{x^1-2}{2} = \frac{x^2+1}{1} = \frac{x^3-1}{-1}.$$

b) Punctul A' este intersecţia dintre planul π şi dreapta d, deci coordonatele ale sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 - x^3 - 1 = 0 \\ \frac{x^1-2}{2} = \frac{x^2+1}{1} = \frac{x^3-1}{-1} \end{cases}.$$

Se obţine $A'\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Deoarece $A'' = 2A' - A$, rezultă $A''\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

c) Aplicând formula distanţei de la un punct la un plan se obţine:

$$\rho(A,\pi) = \frac{|2\cdot 2 - 1 - 1 - 1|}{\|\bar{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

E 7.4 *În spaţiul punctual euclidian $\mathcal{E}_3$, într-un reper cartezian ortonormat, se consideră dreptele*

$$d_1 \ : \ \begin{cases} x^1 + 2x^2 - 3x^3 + 1 = 0 \\ 2x^1 - 3x^2 + x^3 - 4 = 0 \end{cases},$$

$$d_2 \ : \ \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 - 9 = 0 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 = 0 \end{cases}$$

şi planul $\pi : x^1 - x^2 + 2x^3 - 9 = 0$.

a) Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor d_1, d_2.

b) Să se calculeze distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2.

c) Să se scrie ecuaţiile proiecţiei dreptei d_1 pe planul π.

Soluţie. Dreapta d_1 trece prin punctul $A\ \left(\frac{11}{7}, 0, \frac{6}{7}\right)$ şi are vectorul director $\bar{a}\,(1,1,1)$, iar dreata d^2 trece prin punctul $B\,(3,0,6)$ şi are vectorul director $\bar{b}\,(0,1,-1)$.

a) Vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\overline{AB}$ sunt liniar independenţi, întrucât

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{7} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{36}{7} \end{vmatrix} = \frac{16}{7} \neq 0,$$

deci există o unică perpendiculară comună d a dreptelor d_1, d_2. Vectorul director al dreptei d este

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \bar{e}_1 \\ 1 & 1 & \bar{e}_2 \\ 1 & -1 & \bar{e}_3 \end{vmatrix} = \bar{e}_3 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_1.$$

Dreapta d este intersecţia planelor

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x^1 - \frac{11}{7} & 1 & -2 \\ x^2 & 1 & 1 \\ x^3 - \frac{6}{7} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

şi

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x^1 - 3 & 0 & -2 \\ x^2 & 1 & 1 \\ x^3 - 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că

$$d: \begin{cases} -x^2 + x^3 - \frac{6}{7} = 0 \\ x^1 + x^2 + x^3 \quad 9 = 0 \end{cases}.$$

b) Aplicând formula distanţei dintre două drepte necoplanare, deducem

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{\left|\left(\bar{a}, \bar{b}, \overline{AB}\right)\right|}{\left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{7} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{36}{7} \end{vmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{16}{7\sqrt{6}}.$$

c) Dreapta $pr_\pi d_1$ este intersecţia dintre planul π şi planul π_3, care trece prin dreapta d_1 şi este perpendicular pe planul π. Rezultă că π_2 trece prin punctul A şi are vectorii directori $\bar{a}$ şi $\bar{n}(1, \quad 1, 2)$, $\bar{n}$ fiind un vector normal pentru planul π. Deducem

$$\pi_3: \begin{vmatrix} x^1 - \frac{11}{7} & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & -1 \\ x^3 - \frac{6}{7} & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

deci $\pi_3: 3x^1 - x^2 - 2x^3 - 3 = 0$, iar dreapta $pr_\pi d_1$ are ecuaţiile:

$$pr_\pi d_1: \begin{cases} 3x^1 - x^2 - 2x^3 - 3 = 0 \\ x^1 - x^2 + 2x^3 - 9 = 0 \end{cases}.$$

7.2 Exerciţii propuse

E 7.5 *Să se determine planul care trece prin punctul* $A(1, 2, 3)$, *este perpendicular pe planul* $\pi_1: 5x - 2y + 5z - 10 = 0$ *şi face cu planul* $\pi_2: x - 4y - 8z + 12 = 0$ *un unghi de* $45°$.

E 7.6 *Se consideră dreptele*

$$d_1 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ 3x + y \quad z + 13 = 0 \end{cases}, d_2 : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + 2z \quad 8 = 0 \end{cases}.$$

1. *Să se arate că d_1, d_2 sunt concurente şi să se determine ecuaţia planului determinat de ele.*

2. *să se scrie ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor formate de d_1 şi d_2.*

E 7.7 *În spaţiul punctual euclidian $\mathcal{E}_3$, în reperul cartezian ortonormat $Oxyz$, se consideră planele $\pi_1 : 2x + y - z + 2 = 0$, $\pi_2 : x - 3y - 4z = 0$, $\pi_3 : y + z - 2 = 0$.*

1. *Să se arate că cele trei plane determină o prismă.*

2. *Să se determine axa şi raza cilindrului de rotaţie circumscris acestei prisme.*

3. *Să se calculeze aria unei secţiuni ortogonale în prismă.*

E 7.8 *să se găsească centrul şi raza sferei înscriă în tetraedrul determinat de alnele de coordonate şi de planul $\pi : 11x - 10y - 2z - 57 = 0$. Să se determine proiecţia axei Oz pe planul π.*

E 7.9 *Fie x, y distanţele de la punctul M la două drete date şi α, β, γ constante reale, strict pozitive. Să se găsească locul geometric al punctelor M pentru care $\alpha x + \beta y = \gamma$.*

Seminarul 8

Spaţii euclidiene punctuale

8.1 Exerciţii propuse

În spaţiul euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră reperul ortonormat $\mathcal{R} = (O; \{e_1, e_2, e_3\})$.

E 8.1 *Să se scrie ecuaţia sferei care are centrul în punctul* $A(1, -1, 2)$ *şi este tangentă la planul de ecuaţie* $x + y + z = 0$.

E 8.2 *Să se scrie ecuaţiile sferelor ce conţin cercul* $\gamma : z = 0,\ x^2 + y^2 = 11$, *şi sunt tangente la planul de ecuaţie* $x + y + z - 5 = 0$.

E 8.3 *Să se scrie ecuaţia sferei* S *care trece prin punctul* $A(1, 1, 1)$ *şi este tangentă la dreptele* $d_1 : x = y = z$, $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

E 8.4 *Se consideră sfera* S *definită de ecuaţia* $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4 = 0$. *Se cere:*

a) Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la S, care sunt paralele cu planul $\pi : x - y + 2z - 2 = 0$.

b) Să se determine centrul şi raza cercului $S \cap \pi$.

E 8.5 *Se consideră cercul* $\gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z - 40 = 0 \\ 2x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$.

Se cere:

a) Să se determine centrul şi raza cercului γ.

b) Să se scrie ecuaţia sferei care conţine cercul γ şi trece prin originea reperului.

E 8.6 *Să se scrie ecuaţia sferei tangentă dreptei* $d_1 : x - 1 = \frac{y+1}{2} = z$ *în punctul* $A(1, -1, 0)$ *şi dreptei* $d_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = z - 2$ *în punctul* $B(-1, 0, 2)$.

E 8.7 *Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul* $A(5, 2, 0)$ *şi este tangent la sferele* $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 2z + 37 = 0$ *şi* $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 8z + 32 = 0$.

E 8.8 *Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care trec prin punctul* $A(2, 3, -1)$ *şi sunt tangente la axa Oz. Să se recunoască suprafaţa.*

E 8.9 *Să se determine locul geometric al centrelor sferelor are trec printr-un punct fix şi sunt tangente la un plan fix. Să se recunoască locul geometric.*

Seminarul 9

Izometrii

9.1 Exerciţii rezolvate

E 9.1 *In planul euclidian $\mathcal{E}_2$, într-un reper ortonormat, se cere:*

a) să se scrie ecuaţiile rotaţiei planului în jurul punctului $C(2,-5)$, de unghi $\theta = \frac{5\pi}{6}$;

b) să se scrie ecuaţiile simetriei ortogonale a planului faţă de dreapta $x+y-2=0$.

Soluţie. a) Ecuţiile rotaţiei sunt:

$$\begin{cases} x'-2 = (x-2)\cos\frac{5\pi}{6} - (y+5)\sin\frac{5\pi}{6} \\ y'+5 = (x-2)\sin\frac{5\pi}{6} + (y+5)\cos\frac{5\pi}{6} \end{cases}.$$

b) Direcţia de proiecţie este dată vectorul normal $\bar{v}\,(1,1)$ al dreptei d. Aplicând formulele deduse la E 5.2 rezultă că ecuaţiile simetriei cerute

sunt

$$\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = \quad x + 2 \end{cases}.$$

E 9.2 *În planul euclidian $\mathcal{E}_2$, în reperul ortonormat $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, se consideră punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$. Să se determine izometriile $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ ale planului care duc punctele A, O în punctele O, B respectiv. Să se determine elementele geometrice asociate acestor izometrii.*

Soluţie. Dacă φ este o izometrie de tipul I, ecuaţiile sale sunt de forma

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a_1 \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + a_2 \end{cases}.$$

Din condiţia $\varphi(A) = O$ rezultă $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, iar din condiţia $\varphi(O) = B$ se obţine $\sin\theta = -1$, $\cos\theta = 0$. Ecuaţiile izometriei se scriu

$$\begin{cases} \quad x' = y \\ y' = -x + 1 \end{cases}.$$

Izometria φ este rotaţia planului de unghi $\theta = \frac{3\pi}{2}$, în jurul punctului fix $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Dacă φ este o izometrie de tipul II, ecuaţiile sale sunt de forma

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + a_1 \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta + a_2 \end{cases}.$$

Din condiţiile $\varphi(A) = O$, $\varphi(O) = B$ rezultă $a^1 = 0$, $a^2 = 1$, $\sin\theta = -1$, $\cos\theta = 0$, deci ecuaţiile izometriei se scriu

$$\begin{cases} \quad x' = -y \\ y' = -x + 1 \end{cases}.$$

Izometria φ este produsul dintre simetria planului faţă de dreapta d şi translaţia de vector $\bar{v}$. Vectorul propriu al operatorului liniar asociat lui φ, corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$, este $\bar{a}\,(1,-1)$. Rezultă că vectorul de translaţie este

$$\bar{v} = \frac{<\bar{a}, \overline{O\varphi(O)}>}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a} = -\frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2.$$

Dreapta de simetrie este definită de ecuaţia

$$\frac{x}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{1}.$$

E 9.3 *În spaţiul euclidian $\mathcal{E}_3$, într-un reper ortonormat, se cere:*

a) să se scrie ecuaţiile translaţiei de vector $\bar{\mathbf{v}}(1, \quad 2, 4)$;

b) să se scrie ecuaţiile omotetiei de centru $C(2,0,-1)$ şi coeficient $k = -3$.

Soluţie. a) $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 4 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x' - 2 = -3\,(x-2) \\ y' = -3y \\ z' + 1 = -3\,(z+1) \end{cases}$

E 9.4 *În spaţiul euclidian $\mathcal{E}_3$, într-un reper ortonormat, se cere:*

a) să se scrie ecuaţiile rotaţiei spaţiului în jurul axelor de coordonate, respectiv, de unghi θ;

b) să se scrie ecuaţiile rotaţiei spaţiului în jurul dreptei de ecuaţii

$$x-1=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$$

de unghi $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Soluţie.

E 9.5 *În spaţiul euclidian* $\mathcal{E}_3$*, într-un reper ortonormat, se dau planele* $\pi_1: 2x+2y-z+1=0$, $\pi_2: z=0$, *şi dreapta*

$$d: \begin{cases} x-z+1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}.$$

Se cere:

a) să se scrie ecuaţiile simetriei s *a spaţiului faţă de planul* π_1;

b) să se scrie ecuaţiile subspaţiilor $sim_{\pi_1}\pi_2$, $sim_{\pi_1}d$;

c) să se scrie ecuaţiile simetriei spaţiului faţă de drepta d *şi să se scrie ecuaţiile* $sim_d\pi_1$.

Soluţie. a) Ecuaţiile simetriei spaţiului faţă de planul π_1 sunt:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-8y+4z-4}{9} \\ y'=\dfrac{-8x+y+4z-4}{9} \\ z'=\dfrac{4x+4y+7z+2}{9} \end{cases}.$$

b) Întrucât $s \circ s = 1_{\mathcal{E}_3}$, deducem

$$sim_{\pi_1}\pi_2 : \frac{4x+4y+7z+2}{9} = 0$$

şi

$$sim_{\pi_1}d : \begin{cases} \frac{x-8y+4z-4}{9} - \frac{4x+4y+7z+2}{9} + 1 = 0 \\ \frac{-8x+y+4z-4}{9} + \frac{4x+4y+7z+2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$

c) Ecuaţiile simetriei spaţiului faţă de dreapta d sunt:

$$\begin{cases} x' = \frac{-x-2y+2z-2}{3} \\ y' = \frac{-2x-y-2z+2}{3} \\ z' = \frac{2x-2y-z+4}{3} \end{cases},$$

iar ecuaţia planului $sim_d\pi_1$ este

$$sim_d\pi_1 : 2\frac{-x-2y+2z-2}{3} + 2\frac{-2x-y-2z+2}{3} - \frac{2x-2y-z+4}{3} + 1 = 0$$

9.2 Exerciţii propuse

E 9.6 *În planul euclidian $\mathcal{E}_2$, într-un reper ortonormat cu originea în punctul O, se consideră punctele $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$. Să se determine izometriile planului care duc dreptele OA şi OC în dreptele OB şi AC, respectiv. Interpretare geometrică.*

E 9.7 *Să se determine izometriile planului pentru care dreptele $x-y+1=0$ şi $x+y-1=0$ sunt drepte invariante. Să se determine elementele geometrice asociate acestor izometrii.*

E 9.8 *Să se studieze tranformările afine ale planului euclidian $\mathcal{E}_2$ definite într-un reper ortonormat prin ecuaţiile*

$$a)\ \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 4 \end{cases} ;b)\ \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5} \end{cases} ;$$

$$c)\ \begin{cases} x' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 \\ y' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 20 \end{cases} .$$

Seminarul 10

Izometrii

10.1 Exerciţii rezolvate

E 10.1 *Să se studieze transformarea afină $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$ definită, într-un reper cartezian ortonormat, prin ecuaţiile:*

$$a)\ \begin{cases} x' = z + 4 \\ y' = x - 2 \\ z' = y + 6 \end{cases} ;\ b)\ \begin{cases} x' = \dfrac{-6x + 2y + 3z}{7} - 7 \\ y' = \dfrac{2x - 3y + 6z}{7} - 14 \\ z' = \dfrac{3x + 6y + 2z}{7} + 7 \end{cases} .$$

Soluţie. a) Matricea asociată transformării afine φ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

este ortogonală şi $\det A = 1$, prin urmare φ este o izometrie de tipul I a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$, şi anume produsul dintre o translaţie de vector $\bar{v}$

şi o rotaţie de unghi θ în jurul dreptei d. Unghiul de rotaţie este soluţia ecuaţiei

$$2\cos\theta + 1 = \operatorname{tr} A,$$

deci $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Vectorul director $\bar{a}$ al dreptei d este vector propriu pentru matricea A, coreunzător valorii proprii $\lambda = 1$. Rezultă că $\bar{a}(1,1,1)$.

Vectorul de translaţie este

$$\bar{v} = \frac{<\bar{a}, \overline{O\varphi(O)}>}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a} = \frac{8}{3}\bar{a}.$$

Dreapta de rotaţie d este mulţimea punctelor fixe ale transformării $t_{-\bar{v}}\circ\varphi$, definită de ecuaţiile

$$\begin{cases} x' = z + 4 & \frac{8}{3} \\ y' = x - 2 = \frac{8}{3} & . \\ z' = y + 6 - \frac{8}{3} \end{cases}$$

Se obţine

$$d : \begin{cases} -x + z + \frac{4}{3} = 0 \\ x - y - \frac{14}{3} = 0 \end{cases} .$$

E 10.2 *Să se studieze transformarea afină $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$ definită, în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, prin ecuaţiile:*

$$a) \begin{cases} x' = -y + 6 \\ y' = z - 8 \\ z' = x + 2 \end{cases} ; \; b) \begin{cases} x' = \dfrac{2x + 2y + z}{3} + 1 \\ y' = \dfrac{-11x + 10y + 2z}{15} + 2 \\ z' = \dfrac{2x + 5y - 14z}{15} + 3 \end{cases} .$$

Soluţie. a) Matricea asociată transformării afine φ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este ortogonală şi $\det A = -1$, prin urmare φ este o izometrie de tipul II a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$. Deoarece urma matricei A este diferită de 1, izometria φ este produsul dintre o simetrie faţă de un plan π şi o rotaţie de unghi θ în jurul dreptei d. Unghiul de rotaţie este soluţia ecuaţiei

$$2\cos\theta - 1 = \operatorname{tr} A,$$

deci $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

Planul π şi dreapta d trec prin punctul fix $C\,(6,0,8)$ al izometriei φ. Vectorul director $\bar{a}$ al dreptei d este vector propriu pentru matricea A, corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$. Rezultă că $\bar{a}(1,1,-1)$ şi avem

$$\begin{aligned} d &: \frac{x-6}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-8}{-1}, \\ \pi &: x - 6 + y - (z-8) = 0. \end{aligned}$$

Vectorul de translaţie este

$$\bar{v} = \frac{< \bar{a}, \overline{O\varphi(O)} >}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a} = \frac{8}{3}\bar{a}.$$

Dreapta de rotaţie d este mulţimea punctelor fixe ale transformării $t_{-\bar{v}} \circ \varphi$, definită de ecuaţiile

$$\begin{cases} x' = z + 4 - \frac{8}{3} \\ y' = x - 2 - \frac{8}{3} \\ z' = y + 6 - \frac{8}{3} \end{cases}.$$

Se obţine

$$d: \begin{cases} -x + z + \frac{4}{3} = 0 \\ x \quad y \quad \frac{14}{3} = 0 \end{cases}.$$

E 10.3 *Să se studieze transformarea afină $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$ definită, în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1 \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 \\ z' = z + 3 \end{cases}.$$

.

Soluţie. a) Matricea asociată transformării afine φ

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este ortogonală şi $\det A = -1$, prin urmare φ este o izometrie de tipul II a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$. Deoarece urma matricei A este egală cu 1, izometria φ este produsul dintre o simetrie faţă de un plan π şi o translaţie de vector $\bar{v}$.

Planul π trece prin mijlocul P al segmentului $[O\varphi(O)]$, iar vectorul normal $\bar{a}$ al planului π este vector propriu pentru matricea A, corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$. Rezultă că $\bar{a}(1, -2, 0)$ şi avem

$$\pi : x - \frac{1}{2} - 2(y + 1) = 0.$$

Vectorul de translaţie este

$$\bar{v} = \overline{O\varphi(O)} - \frac{< \bar{a}, \overline{O\varphi(O)} >}{\|\bar{a}\|^2}\bar{a} = 3\bar{e}_3.$$

10.2 Exerciţii propuse

E 10.4 *Să se studieze transformarea afină $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ a spaţiului euclidian $\mathcal{E}^3$ definită, într-un reper cartezian ortonormat, prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-6x + 2y + 3z}{7} - 7 \\ y' = \dfrac{2x - 3y + 6z}{7} - 14 \\ z' = \dfrac{3x + 6y + 2z}{7} + 7 \end{cases} .$$

E 10.5 *Să se studieze transformarea afină $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$ definită, în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2x + 2y + z}{3} + 1 \\ y' = \dfrac{-11x + 10y + 2z}{15} + 2 \\ z' = \dfrac{2x + 5y - 14z}{15} + 3 \end{cases}$$

.

E 10.6 *Să se studieze transformarea afină $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ a spaţiului euclidian $\mathcal{E}_3$ definită, în reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{11x + 2y + 10z}{15} + 7 \\ y' = \dfrac{2x + 14y - 5z}{15} + 4 \\ z' = \dfrac{-2x + y + 2z}{3} + 6 \end{cases} .$$

E 10.7 *Să se studieze izometria* $\varphi : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$, *în reperul cartezian ortonormat* $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, *prin ecuaţiile*

$$\begin{cases} x' = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{8}{9}z + 14 \\ y' = -\frac{7}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{4}{9}z + 2 \\ z' = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z - 5. \end{cases}$$

E 10.8 *În spaţiul punctual euclidian* $\mathcal{E}_3$ *se consideră reperul cartezian ortonormat* $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. *Să se determine izometriile spaţiului euclidian* $\mathcal{E}_3$ *pentru care punctele* $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ *sunt puncte fixe. Interpretare geometrică.*

Seminarul 11

Asemănări

11.1 Exerciţii rezolvate

E 11.1 *Se consideră transformarea afină* $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, *care în raport cu reperul cartezian ortonormat* $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ *are ecuaţiile*

$$\begin{cases} x' = 8x - y + 1 \\ y' = x + 8y. \end{cases}$$

Se cere:

a) Să se arate că φ *este o asemănare.*

b) Să se studieze asemănarea φ.

Soluţie. a) Se observă că

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \sqrt{65} \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{65}} & -\frac{1}{\sqrt{65}} \\ \frac{1}{\sqrt{65}} & \frac{8}{\sqrt{65}} \end{pmatrix} = \sqrt{65} A.$$

Matricea A este ortogonală şi $\det A = 1$. Rezultă că φ este o asemănare care se descompune în rotaţia planului în jurul unui punct şi o omotetie de coeficient $\sqrt{65}$. Punctul fix unic al lui φ este $C \quad \frac{7}{50}, \frac{1}{50}$.

Rotaţia are ecuaţiile $(- \quad)$

$$\begin{cases} x' + \frac{7}{50} = \frac{8}{\sqrt{65}} \left(x + \frac{7}{50}\right) - \frac{1}{\sqrt{65}} \left(y - \frac{1}{50}\right) \\ y' - \frac{1}{50} = \frac{1}{\sqrt{65}} \left(x + \frac{7}{50}\right) + \frac{8}{\sqrt{65}} \left(y - \frac{1}{50}\right) \end{cases}.$$

Omotetia are ecuaţiile

$$\begin{cases} x' + \frac{7}{50} = \sqrt{65} \left(x + \frac{7}{50}\right) \\ y' - \frac{1}{50} = \sqrt{65} \left(y - \frac{1}{50}\right) \end{cases}.$$

E 11.2 *Se consideră transformarea afină* $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, *care în raport cu reperul cartezian ortonormat* $= O, \bar{e}_1, \bar{e}_2$ *are ecuaţiile*

$\mathcal{R} \quad \{ \quad \}$

$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}.$$

Se cere:

a) Folosind definiţia, să se arate că φ *este o asemănare.*

b) Să se studieze asemănarea φ.

Soluţie. a) Dacă $P\left(x^1, y^1\right), Q\left(x^2, y^2\right)$ avem

$$\varphi(P) = P'\left(x^1 + y^1 - 1, x^1 - y^1 + 2\right),$$

şi

$$\varphi(Q) = Q'\left(x^2 + y^2 - 1, x^2 - y^2 + 2\right).$$

Rezultă

$$\begin{aligned}\rho(P',Q') &= \sqrt{[(x^1-x^2)+(y^1-y^2)]^2+[(x^1-x^2)-(y^1-y^2)]^2} \\ &= \sqrt{2[(x^1-x^2)+(y^1-y^2)]^2} \\ &= \sqrt{2}\cdot\rho(P,Q).\end{aligned}$$

Deci φ este o asemănare de coeficient $k=\sqrt{2}$ a planului $\mathcal{E}_2$. Punctul fix unic al lui φ este $C(0,1)$.

Matricea operatorului liniar asociat lui φ este

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \sqrt{2}A.$$

Deoarece $\det A=-1$, transformarea φ este o asemănare care se poate produul dintre o omotetie de coeficient $\sqrt{2}$ şi simetria în raport cu o dreaptă d care trece prin C şi are direcţia dată de un vector propriu $\bar{a}$, coresunzător valorii prorii $\lambda=1$. Obţinem $\bar{a}=\bar{e}_1+\left(\sqrt{2}-1\right)\bar{e}_2$. Astfel, ecuaţia axei de simetrie este

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{\sqrt{2}-1},$$

iar ecuaţiile omotetiei de centru C şi coeficient $\sqrt{2}$ sunt scrie ca în rotaţia planului în jurul unui punct şi. .

Omotetia are ecuaţiile

$$\begin{cases} x'=\sqrt{2}x \\ y'-1=\sqrt{2}(y-1) \end{cases}.$$

E 11.3 *Să se arate că dacă o transformare bijectivă a planului euclidian $\mathcal{E}_2$ duce cercuri în cercuri atunci ea este o transformare afină.*

Soluţie. Fie $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ o transformare bijectivă a planului care duce cercuri în cercuri şi fie A, B, C trei puncte afin dependente (coliniare). Preupunem prin absurd că imaginile A', B', C' ale punctelor A, B, C prin transformarea φ nu sunt coliniare. Atunci fie Γ cercul determinat de ele. Transformarea φ fiind bijectivă, inversa sa φ^{-1} duce, de asemenea, cercuri în cercuri. Deci $\varphi^{-1}(\Gamma)$ este un cerc care trebuie să conţină punctele coliniare A, B, C. Contradicţie. Rezultă că transformarea φ duce drepte în drepte, deci este o transformare afină.

E 11.4 *Să se determine transformările afine ale planului euclidian $\mathcal{E}_2$ care invariază cercurile.*

Soluţie. Fie $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ o transformare afină a planului $\mathcal{E}_2$ care invariază cercurile, definită în reperul cartezian $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ de ecuaţiile

$$\begin{cases} y^1 = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a^1 \\ y^2 = a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a^2 \end{cases}.$$

Inversa transformării φ este $\varphi^{-1} : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, definită de ecuaţiile

$$\begin{cases} x^1 = b_{11}y^1 + b_{12}y^2 + b^1 \\ x^2 = b_{21}y^1 + b_{22}y^2 + b^2 \end{cases}.$$

Dacă $M(x^1, x^2)$ descrie cercul de ecuaţie

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2mx^1 + 2nx^2 + p = 0,$$

atunci $M'(y^1, y^2) = \varphi(M)$ descrie curba Γ de ecuaţie

$$(b_{11}^2 + b_{21}^2)(y^1)^2 + (b_{12}^2 + b_{22}^2)(y^2)^2 + 2(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22})y^1y^2 + 2(b^1b_{11} + \\ + b^2b_{21} + mb_{11} + nb_{21})y^1 + 2(b^1b_{12} + b^2b_{22} + mb_{12} + nb_{22})y^1 + (b^1)^2 +$$

$+(b^2)^2 + p = 0.$

Curba Γ este un cerc dacă şi numai dacă

$$\begin{aligned} b^{11^2} + b^{21^2} &= b^{12^2} + b^{22^2} = k^2, k \in \mathbf{R}^*. \\ b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Fie $b_{11} = k\cos t$, $b_{21} = k\sin t$, $b_{12} = k\cos s$, $b_{22} = k\sin s$, cu $t, s \in \mathbf{R}$. Din (11.1) deducem $t - s = \frac{\pi}{2}$ sau $t - s = \frac{3\pi}{2}$, adică matricea asociată lui φ^{-1} este de forma

$$A_1 = k\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

sau

$$A_2 = k\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Rezultă că transformarea afină φ^{-1}, deci şi φ, este o asemănare.

E 11.5 *Să se determine transformările afine ale planului geometric $\mathcal{E}_2$ care invariază hiperbola definită prin ecuaţia:*

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soluţie. Fie $\varphi : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ o transformare afină a planului definită în reperul cartezian $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ de ecuaţiile

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y\prime = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}.$$

Imaginea hiperbolei H prin transformarea afină φ este curba

$$\varphi(H): \frac{(a_{11}x+a_{12}y+a_1)^2}{a^2}-\frac{(a_{21}x+a_{22}y+a_2)^2}{b^2}-1=0.$$

Condiţia $\varphi(H)=H$ implică:

$$\frac{a_{11}a_{12}}{a^2}-\frac{a_{21}a_{22}}{b^2}=0, \frac{a_{11}a_1}{a^2}-\frac{a_{21}a_2}{b^2}=0, \frac{a_{12}a_1}{a^2}-\frac{a_{22}a_2}{b^2}=0, \quad (11.2)$$

şi

$$a_{11}^2-\frac{a^2}{b^2}a_{21}^2=\frac{b^2}{a^2}a_{12}^2-a_{22}^2=1-\frac{a_1^2}{a^2}+\frac{a_2^2}{b^2}. \quad (11.3)$$

Fie $a_{11}=r\operatorname{ch}t$, $a_{21}=r\frac{b}{a}\operatorname{sh}t$, $a_{22}=r\operatorname{ch}s$, $a_{12}=r\frac{a}{b}\operatorname{sh}s$, cu $t,s\in\mathbf{R}$. Din (11.2) deducem $t-s=0$, $a_1=a_2=0$, ceea ce implică $r=1$.

Transformarea φ are ecuaţiile

$$\varphi(t):\begin{cases} x'=x\operatorname{ch}t+\frac{b}{a}y\operatorname{sh}t \\ y'=\frac{b}{a}x\operatorname{sh}t+y\operatorname{ch}t \end{cases}, \quad t\in\mathbf{R}.$$

Observaţie. Mulţimea $\{\varphi(t), t\in\mathbf{R}\}$ a tranformărilor afine ale planului care invariază hiperbola H formează un subgrup al grupului $Aff(\mathcal{E}_2)$.

11.2 Exerciţii propuse

E 11.6 *Se consideră transformarea afină $\varphi:\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_2$, care în raport cu reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}=\{O,\vec{e}^1,\vec{e}^2\}$ are ecuaţiile*

$$\begin{cases} x'=2x+3y+1 \\ y'=3x-2y+2 \end{cases}.$$

Se cere:

a) Folosind definiţia, să se arate că φ este o asemănare.

b) Să se studieze asemănarea φ.

E 11.7 *Să se determine transformările afine $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ ale planului euclidian $\mathcal{E}_2$ care invariază conica definită prin ecuaţia:*

a) $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$;

b) $P : y^2 = 2px$.

E 11.8 *Să se determine ecuaţiile transformării afine $\varphi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$ care invariază parabola $y^2 = 2x$ şi duce punctele $A(2,2)$ în $A'(8,4)$, şi $B(1/2,1)$ în $B'(9/2,3)$.*

E 11.9 *Să se arate că transformarea afină φ a planului euclidian $\mathcal{E}_2$ este o asemănare dacă şi numai dacă duce cercuri în cercuri.*

Seminarul 12

Conice

12.1 Exerciţii rezolvate

E 12.1 *În plan, într-un reper ortonormat, se dau punctul* $A(-2,4)$, *dreapta* $d: 3x+4y+10=0$, *cercul* $\gamma: x^2+y^2-4x-2y-4=0$. *Se cere:*

a) *să se scrie ecuaţia cercului cu centrul în punctul* A, *de rază egală cu* 5;

b) *să se determine centrul şi raza cercului* γ;

c) *să se scrie ecuaţia cercului cu centrul în punctul* A, *tangent dreptei* d;

d) *să se scrie ecuaţiile cercurilor cu centrul în punctul* A *şi tangente cercului* γ.

Soluţie. a) $(x+2)^2+(y-4)^2=5^2$.

b) Ecuaţia cercului se scrie $(x-2)^2+(y-1)^2=9$, deci centrul cercului γ este punctul $C(2,1)$, iar raza sa este $r=3$.

c) Raza cercului este egală cu distanţa de la punctul A la dreapta d, $\rho(A,d)=|3(-2)+4\cdot 4+10|\,/\,\sqrt{9+16}=4$. Ecuaţia cercului este $(x+2)^2+(y-4)^2=16$.

d) Razele celor două cercuri sunt egale cu $\rho(A,C)+r$ şi, respectiv, $\rho(A,C)-r$.

E 12.2 *Să se determine puterea punctului $A(x_0,y_0)$ faţă de cercul γ : $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. Să se scrie ecuaţia axei radicale a cercurilor $\gamma_i: x^2+y^2+2a_ix+2b_iy+c_i=0$, $i=1,2$.*

Soluţie. Fie $C(-a,-b)$ şi $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$ centrul şi respectiv raza cercului γ. Puterea punctului M faţă de cercul γ este $p(A,\gamma)=|AC|^2-r^2=(x_0+a)^2+(y_0+b)^2-a^2-b^2+c$. Deci $p(A,\gamma)=x_0^2+y_0^2+2ax_0+2by_0+c$. Fie $M(x,y)$ un punct al axei radicale. Atunci $p(M,\gamma_1)=p(M,\gamma_2)$. Deducem că ecuaţia axei radicale este $2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0$.

E 12.3 *Să se scrie ecuaţiile cercurilor γ_1 şi γ_2 într-un reper ortonomat în care axa Ox coincide cu linia centrelor cercurilor, iar axa Oy coincide cu axa radicală a cercurilor γ_1 şi γ_2.*

Soluţie. Fie $\gamma_i: x^2+y^2+2a_ix+2b_iy+c_i=0$, $i=1,2$, ecuaţiile celor două cercuri în reperul considerat. Cum centrele celcurilor γ_1 şi γ_2 sunt situate pe axa Ox deducem că $b_1=b_2=0$. Din ipoteza că axa Oy coincide cu axa radicală a cercurilor γ_1 şi γ_2 rezultă că $c_1=c_2=c$, iar $a_1\neq a_2$. Deci $\gamma_i: x^2+y^2+2a_ix+c=0$, $i=1,2$, cu $a_1\neq a_2$.

E 12.4 *Să se scrie condiţia de ortogonalitate a cercurilor* $\gamma_i : x^2 + y^2 + 2a_i x + 2b_i y + c_i = 0$, $i = 1, 2$. *Să se găsească ecuaţia locului geometric a cercurilor ortogonale cercurilor* γ_1 *şi* γ_2.

Soluţie. Să notăm cu $O_i(-a_i, -b_i)$ centrul şi cu r_i raza cercului γ_i, $i = 1, 2$, iar cu P unul dintre punctele de intersecţie ale celor două cercuri. Dacă cercurile γ_1 şi γ_2 sunt ortogonale atunci triunghiul PO_1O_2 este dreptunghic, cu $\sphericalangle O_1PO_2 = \pi/2$. Deducem că $r_1^2 + r_2^2 = |O_1O_2|^2$, de unde se obţine condiţia de ortogonalitate $2(a_1a_2 + b_1b_2) + (c_1 + c_2) = 0$.

Fie $M(x_0, y_0)$ un punct al locului geometric şi fie $\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, un cerc cu centrul în punctul M care este ortogonal ccercurilor date. Eliminând pe r din cele două condiţii de ortogonalitate $2(-a^i x^0 - b^i y^0) + (c^i + x^{0\,2} + y^{0\,2} - r^{\,2}) = 0$, $i = 1, 2$, şi renotând cu (x, y) coordonatele punctului M se obţine $2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y = c_1 - c_2$. Relaţia obţinută reprezintă ecuaţia unei drepte d în care este inclus locul geometric. Fie acum $M(x_0, y_0) \in d$. Atunci cercul cu centrul în punctul M şi având raza r, cu $r^2 = 2(-a_i x_0 - b_i y_0) + (c_i + x_0^2 + y_0^2)$, unde $i = 1$ sau $i = 2$, este ortogonal cercurilor γ_1 şi γ_2. Locul geometric este deci dreapta d.

E 12.5 *În plan, în reper ortonormat, se consideră elipsa* $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Se cere:*

a) *Să se scrie ecuaţia tangentei la elipsă în punctul* $A(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$.

b) *Să se scrie ecuaţile tangentelor la elipsa* $\mathcal{E}$, *având coeficientul unghiular* m.

Soluţie. a) $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. b) Fie $d : y = mx + n$. Dreapta d este tangentă la elipsa $\mathcal{E}$ dacă şi numai dacă discriminantul ecuaţiei

$$(m^2a^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0 \tag{12.1}$$

este nul. Se obţine $n = \pm\sqrt{m^2a^2 + b^2}$.

E 12.6 *Să se găsească locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la elipsa* $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soluţie. Punctele (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$ aparţin locului geometric. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct aparţinând locului geometric, diferit de cele patru puncte menţionate şi fie $d : y - y_0 = m(x - x_0)$, $m \neq 0$, o dreaptă care trece prin punctul M. Dreapta d este tangentă la elipsa $\mathcal{E}$ dacă şi numai dacă discriminantul ecuaţiei 12.1, unde $n = y_0 - mx_0$, este nul. Se obţine condiţia $(y_0 - mx_0)^2 = m^2a^2 + b^2$, sau, echivalent,

$$(a^2 - x_0^2)m^2 + 2mx_0y_0 + (b^2 - y_0^2) = 0. \tag{12.2}$$

Dacă discriminantul ecuaţiei (12.2) este pozitiv, i.e. $4a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) > 0$, atunci există două tangente distincte la elipsă, corespunzătoare soluţiilor reale distincte m_1, m_2 ale ecuaţiei (12.2). Cele două tangente sunt perpendiculare dacă $m_1m_2 = -1$, deci $(b^2 - y_0^2) = -(a^2 - x_0^2)$. Se obţine astfel ecuaţia locului geometric $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Locul geometric este

un cerc,cu centrul în origine. Acest cerc este circumscris dreptunghiului are încadrează elipsa şi se numeşte cercul lui Monge.

E 12.7 *În plan, în reper ortonormat, se consideră hiperbola* $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Se cere:*

a) Să se scrie ecuaţia tangentei la hiperbolă în punctul $A(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$.

b) Să se scrie ecuaţile tangentelor la hiperbola $\mathcal{H}$, *având coeficientul unghiular* m.

Soluţie. a) $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. b) Fie $d : y = mx + n$. Dreapta d este tangentă la hiperbola $\mathcal{H}$ dacă şi numai dacă discriminantul ecuaţiei

$$(m^2a^2 - b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 + b^2) = 0 \tag{12.3}$$

este nul. Se obţine $n = \pm\sqrt{m^2a^2 - b^2}$, în ipoteza $m^2a^2 - b^2 > 0$.

E 12.8 *Să se găsească locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la hiperbola* $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soluţie. Procedând ca în exerciţiul 12.6, se obţine ecuaţia locului geometric $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$. Locul geometric este mulţimea vidă (un cerc imaginar) dacă $a < b$, un punct dacă $a = b$, şi un cerc cu centrul în origine dacă $a > b$. Acest cerc se numeşte, ca şi la elipsă, cercul lui Monge.

12.2 Exerciţii propuse

E 12.9 *Să se găsească locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la parabola* $\mathcal{P} : y^2 = 2px$.

E 12.10 *Să se găsească locul geometric al mijloacelor coardelor paralele cu o direcţie dată duse la elipsa* $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *(Hiperbola* $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *sau parabola* $\mathcal{P} : y^2 = 2px$*).*

E 12.11 *Să se determine locul geometric al punctelor din planul euclidian $\mathcal{E}_2$ pentru care raportul distanţelor la un punct fix F şi la o dreaptă fixă h, $F \in h$, este constant.*

E 12.12 *Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc un punct fix A cu un punct variabil M situat pe cercul dat $\mathcal{C}(O, r)$.*

E 12.13 *În plan, în reper ortonormat, se consideră parabola $\mathcal{P} : y^2 = 2px$. Se cere:*

a) Să se scrie ecuaţia tangentei la parabolă în punctul $A(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$.

b) Să se scrie ecuaţile tangentelor la parabola $\mathcal{P}$, având coeficientul unghiular m.

Seminarul 13

Conice

13.1 Exerciţii rezolvate

În planul euclidian $\mathcal{E}_2$ se consideră reperul ortonormat $\mathcal{R} = (O; \{e_1, e_2\})$.

E 13.1 *Se consideră conica*

$$x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0.$$

Se cere:

a) să se scrie ecuaţiile axelor de simetrie;

b) să se ecuaţiile asimptotelor conicei;

c) să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare.

Soluţie. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

matricea asociată ecuaţiei. Polinomul caracteristic asociat matricei A este

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 40,$$

cu valorile proprii $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 5$ şi $\bar{v}_1(2,3)$, $\bar{v}_2(-3,2)$ vectorii proprii corespunzători.

a) Axele de simetrie sunt diametri conjugaţi cu direcţiile $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$. Ecuaţiile lor sunt:

$$\begin{aligned} 2(2x - 12y + 12) + 3(-12x - 8y + 8) &= 0, \\ -3(2x - 12y + 12) + 2(-12x - 8y + 8) &= 0 \end{aligned}$$

deci $2x + 3y - 3 = 0$ şi $-3x + 2y - 2 = 0$.

b) Conica este de tip hiperbolic $(\delta = -40 < 0)$, deci există două asimptote care trec prin centrul de simetrie şi au direcţie asimptotică.

Centrul de simetrie C al conicei se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 2x - 12y + 12 = 0 \\ -12x - 8y + 8 = 0 \end{cases}$$

Rezultă $C(0,1)$. Dacă $\bar{u}(u^1, u^2)$ este o direcţie asimptotică atunci

$$\left(u^1\right)^2 - 12u^1u^2 - 4\left(u^2\right)^2 = 0.$$

Deducem $\bar{u}_1\left(6+2\sqrt{10},1\right)$, $\bar{u}_2\left(6-2\sqrt{10},1\right)$, iar ecuaţiile asimptotelor sunt:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x}{6+2\sqrt{10}} & = & \dfrac{y-1}{1}, \\ \dfrac{x}{6-2\sqrt{10}} & = & \dfrac{y-1}{1}. \end{array}$$

c) În urma schimbării de coordonate

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y-1 \end{cases},$$

se obţine ecuaţia:

$$(x')^2 - 12x'y' - 4(y')^2 + 12x' + 8y' + 9 = 0.$$

Vectorii $\bar{f}_1\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $\bar{f}_2\left(\frac{-3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ constituie o bază ortonormată formată din vectori proprii. Considerând schimbarea de coordonate

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

se obţine

$$-8(x'')^2 + 5(y'')^2 + 9 = 0.$$

Ecuaţia are forma canonică:

$$\frac{(x'')^2}{\frac{9}{8}} - \frac{(y'')^2}{\frac{9}{5}} - 1 = 0$$

şi reprezintă o hiperbolă.

E 13.2 *Se consideră conica*

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

Se cere:

a) să se scrie ecuaţiile axelor de simetrie;

b) să se ecuaţiile tangentelor paralele cu dreapta $d : x + y = 0$*;*

c) să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor paralele cu dreapta d*;*

d) să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare.

Soluţie. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

matricea asociată ecuaţiei. Polinomul caracteristic asociat matricei A este

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 15\lambda + 50,$$

cu valorile proprii $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$ şi $\bar{v}_1(-2, 1)$, $\bar{v}_2(1, 2)$ vectorii proprii corespunzători.

a) Axele de simetrie sunt diametri conjugaţi cu direcţiile $\bar{v}1$, $\bar{v}2$. Ecuaţiile lor sunt:

$$\begin{aligned} -2(18x - 4y + 16) + (-4x + 12y - 8) &= 0, \\ (18x - 4y + 16) + 2(-4x + 12y - 8) &= 0 \end{aligned}$$

deci $2x - y + 2 = 0$ şi $x + 2y = 0$.

b) Fie

$$d^{\alpha} : x + y + \alpha = 0$$

o dreaptă paralelă cu dreapta d. Dreapta d_{α} este tangentă conicei dacă şi numai dacă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x + y + \alpha = 0 \\ 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Se obţine $\alpha_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{95}$, $\alpha_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{95}$.

c) Locul geometric căutat este diametrul conjugat direcţiei $\bar{u}\,(1, -1)$ a dreptei d. Se obţine dreapta

$$(18x - 4y + 16) - (-4x + 12y - 8) = 0.$$

d) Centrul de simetrie C al conicei se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 18x - 4y + 16 = 0 \\ -4x + 12y - 8 = 0 \end{cases}$$

Rezultă $C\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$. În urma schimbării de coordonate

$$\begin{cases} x' = x + \frac{4}{5} \\ y' = y - \frac{2}{5} \end{cases},$$

se obţine ecuaţia:

$$9\left(x'\right)^2 - 4x'y' + 6\left(y'\right)^2 + 16x' - 8y' - 10 = 0.$$

Vectorii $\bar{f}_1\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\bar{f}_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ constituie o bază ortonormată formată din vectori proprii. Considerând schimbarea de coordonate

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

se obţine

$$10\left(x''\right)^2 + 5\left(y''\right)^2 - 10 = 0.$$

Ecuaţia are forma canonică:

$$\frac{\left(x''\right)^2}{1} + \frac{\left(y''\right)^2}{2} - 1 = 0$$

şi reprezintă o elipsă.

13.2 Exerciţii propuse

E 13.3 *Se consideră conica*

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0.$$

Se cere:

a) să se scrie ecuaţiile axelor de simetrie;

b) să se ecuaţia tangentei în vârful conicei;

c) să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare.

E 13.4 *Să se determine asimptotele şi axele de simetrie ale conicei*

$$\gamma : x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 3y + 2 = 0.$$

E 13.5 *Se consideră conica* $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$. *Se cere:*

a) să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $M(1, 0)$*;*

b) să se ecuaţia tangentei în vârful conicei;

c) să se scrie ecuaţiile tangentelor paralele cu dreapta $d : x + y = 0$*;*

d) să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare.

E 13.6 *Se consideră conica*

$$2xy - 4x + 2y + 1 = 0.$$

Se cere:

a) să se scrie ecuaţiile axelor de simetrie;

b) să se ecuaţiile asimptotelor;

c) să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare.

E 13.7 *Se consideră familia de conice*

$$\gamma_\alpha : x^2 - 2y + \alpha(y^2 - 2x) = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Să se discute tipul şi genul conicelor γ_α *după* α.

Seminarul 14

Cuadrice

14.1 Exerciţii propuse

În spaţiul euclidian $\mathcal{E}_3$ se consideră reperul ortonormat $\mathcal{R} = (O; \{e_1, e_2, e_3\})$.

E 14.1 *Să se calculeze distanţele de la elipsoidul* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$ *la planele*

a) $2x - y + z - 4 = 0$;

b) $x - y + z - 5 = 0$.

E 14.2 *Se consideră hiperboloidul cu o pânză* $H : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ *şi planul* $\pi : 4x - 5y - 10z - 20 = 0$.

a) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M(-5, 4, 2)$.

b) Să se arate că planul π *intersectează* H *după două generatoare rectilinii.*

E 14.3 *Se consideră paraboloidul hiperolic* $\Gamma : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$.

a) Să se determine unghiul format de generatoarele rectilinii care trec prin punctul $M(0, 2, -1)$.

b) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii paralele cu planul $2x - y + z = 0$.

E 14.4 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 \quad 2xy \quad 2yz + 4x \quad 2y = 0.$$

Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia planului tangent la Γ *în punctul* $M(-2, 0, 0)$.

b) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin M.

c) Să se scrie ecuaţiile planelor de simetrie.

d) Să se aducă ecuaţia la forma cononică, precizând shimbările de repere necesare.

E 14.5 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0.$$

Se cere:

a) Să se arate că Γ *admite generatoare rectilinii şi să se determine direcţiile acestora.*

b) Să se aducă ecuaţia la forma cononică, precizând shimbările de repere necesare.

E 14.6 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0.$$

Se cere:

a) Să se determine planele de simetrie ale cuadricei.

b) Să se determine punctele cuadricei prin care trec generatoare rectilinii perpendiculare.

c) Să se aducă ecuaţia la forma cononică, precizând shimbările de repere necesare.

E 14.7 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - x + 2y - z + 1 = 0.$$

Se cere:

a) Să se determine planele de simetrie şi axele de simetrie ale cuadricei.

b) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M\,(0, -1, 0)$.

c) Să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimbările de repere necesare.

E 14.8 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - 2y - 2z = 0.$$

Se cere:

a) Să se determine planul diametral conjugat cu direcţia $\bar{v}(1, -1, 2)$.

b) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M(0, 0, 0)$.

c) Să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare.

E 14.9 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$x^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 6x + 4y + 2z + 8 = 0.$$

Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia planului tangent la Γ *paralel cu planul* $\pi : x + y + z = 0$.

b) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M(2, 0, 0)$.

c) Să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare.

E 14.10 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0.$$

Se cere:

a) Să se scrie ecuaţia planului tangent la Γ *paralel cu planul* $\pi : x + 2y + 2 = 0$.

b) Să se determine polul planului π *faţă de* Γ.

c) Să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare.

e) Să se determine valorile parametrului a pentru care Γ *este o cuadrică riglată.*

E 14.11 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 1 = 0.$$

Se cere:

a) Să se determine centrele de simetrie şi planele de simetrie ale cuadricei.

b) Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile generatoarelor rectilinii în punctul $M(1, 0, 0)$.

c) Să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare. Să se recunoască suprafaţa.

E 14.12 *Se consideră cuadrica* Γ *definită de ecuaţia*

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z = 0.$$

Se cere:

a) Să se determine centrele de simetrie şi planele de simetrie ale cuadricei.

b) Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii care trec prin origine.

c) Să se aducă ecuaţia la forma canonică, precizând schimările de repere necesare. Să se recunoască suprafaţa.

E 14.13 *Să se aducă la forma canonică şi să se recunoască cuadricele următoare:*

1. $5x^2 - 8y^2 + z^2 - 6xz + 8 = 0; (H_2)$
2. $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0; (H_2)$
3. $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0; (H_1)$
4. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8xz - 14x - 4y + 14z + 18 = 0; (H_1);$
5. $xy + z^2 - 2 = 0;$
6. $2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0; (PH)$
7. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0; (CH);$
8. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0; (CP);$

9. $x^2 + y^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$; *(CP);*

10. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$;

Bibliografie

[1] Ion Vladimirescu, Mariana Popescu. Algebră liniară şi geometrie n-dimensională, Ed. Radical, Craiova, 1996.

[2] Ion Vladimirescu, Mariana Popescu. Algebră liniară şi geometrie analitică, Ed. Universitaria, Craiova, 1993.